

MARIA CLÁUDIA FREITAS DE SOUSA MENDES ARAÚJO

UMA CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO
DE PROBLEMAS DE COMPLETAMENTO
DE MATRIZES

Dissertação apresentada
para obtenção do grau de
Doutor em Ciências.

UNIVERSIDADE DO MINHO

BRAGA, 2004

É autorizada a reprodução integral desta tese apenas para efeitos de investigação.

Agradecimentos

Estes anos são viagem... assim cantamos no Hino desta Universidade e desta forma olho para estes anos que foram percurso e que me trazem a estas páginas. Folheando-as consigo encontrar, por detrás das palavras que aqui fui escrevendo, uma imensidão de rostos que são expressão de apoio, de confiança e de amizade. Estas são as palavras para todos aqueles que marcaram o construir deste trabalho.

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Urbano, um profundo agradecimento por toda a atenção dedicada e por todo o saber que colocou ao meu alcance.

Ao meu orientador, Professor Doutor Juan Ramón Torregrosa, um especial agradecimento pelas longas horas em volta das matrizes, pela sua enorme disponibilidade.

Aos dois agradeço toda a amizade e o acolhimento nos meus saltos até Valência.

Fica, também, um sentido agradecimento à Professora Doutora Paula Smith. Pela sua presença. Pela inquestionável amizade.

À Granny, aos meus pais, irmãos e a toda a sobrinhada, um obrigada terno. Pelo muito que representam nesta viagem.

Ao Jorge, pelo fazer-se viajante comigo, um agradecimento especial.

À *gente que vale a pena* do CAUM, um sorriso grato. Pelas cantorias. Pela muita amizade. Pelo *caminho feito a andar*.

Aos *stessa* e aos *aCABados*, um outro sorriso grato. Pelas conversas e chás pela noite dentro.

Ainda uma palavra de reconhecimento ao Centro de Matemática da Universidade do Minho, ao Departamento de Matemática da Universidade do Minho e às pessoas e amigos que comigo aí trabalham, por todo o apoio mostrado.

Conteúdo

| | |
|---|------------|
| Introdução | vii |
| 1 Algumas notas preliminares | 9 |
| 1.1 Teoria de Completamento | 12 |
| 1.2 Teoria de Grafos | 20 |
| 1.3 Sobre algumas classes de matrizes | 36 |
| 1.3.1 A classe das N_k -matrizes: algumas propriedades | 37 |
| 1.3.2 A classe das TNP -matrizes: algumas notas | 47 |
| 1.3.3 Classes de matrizes com menores principais positivos | 51 |
| 1.3.4 Matrizes principalmente não singulares | 56 |
| 1.3.5 Relações entre as classes de matrizes | 57 |
| 2 Completamentos de N_k-matrizes parciais | 59 |
| 2.1 N -matrizes parciais | 60 |
| 2.1.1 Matrizes parciais combinatorialmente simétricas | 68 |
| 2.1.2 Matrizes parciais não combinatorialmente simétricas | 78 |
| 2.1.3 Sob condições de simetria | 89 |
| 2.2 N_k -matrizes parciais | 98 |
| 2.2.1 O caso combinatorialmente simétrico | 100 |
| 2.2.2 O caso não combinatorialmente simétrico | 107 |
| 3 Completamentos de matrizes totalmente não positivas parciais | 111 |
| 3.1 TNP -matrizes parciais | 112 |
| 3.1.1 Grafos cordais | 117 |
| 3.1.2 Ciclos não dirigidos | 154 |
| 3.1.3 O caso não combinatorialmente simétrico | 160 |
| 3.2 TNP_2 -matrizes parciais | 168 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4 | Completamentos de matrizes parciais com menores principais positivos | 173 |
| 4.1 | O problema de completamento de P -matrizes parciais: antecedentes e estado actual | 174 |
| 4.2 | P_k -matrizes parciais | 181 |
| 4.3 | Uma nota sobre M -matrizes parciais | 184 |
| 4.4 | DN -matrizes parciais | 195 |
| 4.4.1 | Grafos cordais | 197 |
| 4.4.2 | Ciclos | 204 |
| 5 | Completamentos de matrizes principalmente não singulares parciais | 209 |
| 5.1 | Os casos básicos | 211 |
| 5.2 | A resposta ao problema | 214 |
| 6 | Conclusões e linhas futuras | 217 |
| | Bibliografia | 221 |
| | Lista de Notações | 227 |
| | Índice Remissivo | 229 |

Introdução

Os objectos centrais desta monografia são as matrizes parciais: matrizes em que algumas das entradas são especificadas, ou seja, elementos conhecidos de um dado conjunto, e as restantes não são prescritas, sendo tratadas como variáveis livres, usualmente sobre o mesmo conjunto. Um conceito de facto simples, mas certamente rico e interessante. Um completamento de uma matriz parcial será naturalmente uma especificação das entradas não fixadas, resultando uma matriz convencional.

Os problemas aqui abordados inserem-se nos chamados *Problemas Inversos de Matrizes*. A preocupação primária não será tanto o estudo de propriedades de uma dada classe de matrizes, mas sim a análise da existência de matrizes satisfazendo condições previamente prescritas.

Com base nos conceitos de matriz parcial e de completamento, temos a chamada *Teoria de Completamento* e os *problemas de completamento de matrizes*. Para uma classe particular de matrizes, coloca-se a questão da existência ou não de completamentos de matrizes parciais pertencentes a essa classe de interesse. Por exemplo, para matrizes definidas positivas, podemos identificar as matrizes parciais que admitem matrizes definidas positivas como completamentos. Esta questão foi resolvida em [21], usando técnicas de teoria de grafos. Em [35], Johnson apresenta um *survey* de problemas de completamento de matrizes, focando questões relacionadas com matrizes definidas positivas, completamentos com característica previamente prescrita e completamentos de contracções. Estes trabalhos deram origem a uma série de estudos nesta área, incluindo resultados para M -matrizes inversas (ver [25, 27, 28, 29, 39, 40, 51]), M -matrizes (ver [26, 28, 29, 39]), P -matrizes (ver [9, 13, 28, 36, 52]), matrizes totalmente não negativas (ver [37]) e para algumas classes definidas por condições de simetria e de positividade sobre P_0 -matrizes (ver [13]).

Nesta dissertação, propomo-nos estudar alguns novos problemas de completamento de matrizes e contribuir, ainda, para o estudo já elaborado para alguns dos problemas atrás referidos.

Assumimos conhecidos por parte do leitor os conceitos e os resultados básicos de teoria de matrizes descrita, por exemplo, em [30], [31] e [55].

Esta monografia está dividida em seis capítulos.

Iniciamos cada capítulo com um resumo do seu conteúdo tendo em vista contextualizar o leitor no estudo que se segue.

No primeiro capítulo, introduzimos alguns conceitos e ferramentas habituais na Teoria de Completamento. Relembramos, ainda, conceitos básicos de Teoria de Grafos que fundamentam a abordagem combinatória de muitos problemas de completamento de matrizes. Numa última secção, consideramos algumas classes de matrizes, as suas propriedades e relações, que serão essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes.

No segundo capítulo, consideramos matrizes parciais cujas submatrizes principais totalmente especificadas têm determinante negativo. Na literatura, nada encontrámos relativo ao problema de completamento enunciado para esta classe de matrizes. Tendo em conta a importância crescente destas matrizes na economia, na programação linear e quadrática convexa, na análise multivariante, etc., e seguindo uma filosofia comum a este tipo de problemas de completamento, apresentamos, então, um estudo dos tipos de grafos e digrafos completáveis.

No terceiro capítulo, apresentamos uma análise do problema de completamento de matrizes totalmente não positivas, motivados pelo trabalho de Johnson, Kroschel e Lundquist (ver [37]).

O denominador comum das classes de matrizes abordadas no quarto capítulo são os menores principais positivos. Neste estudo, examinamos problemas de completamento já considerados por vários autores, generalizando resultados conhecidos e analisando alguns desses problemas sob novas condições de simetria, de positividade e de tipo de grafos.

Considerando algumas das classes de matrizes abordadas nos problemas de completamento dos capítulos anteriores, podemos encontrar, como ponto comum, a não singularidade das submatrizes principais. Neste sentido, consideramos, num quinto capítulo, o problema de completamento para a classe de matrizes mais abrangente, a das matrizes principalmente não singulares.

Terminamos esta monografia com um sexto capítulo, onde apresentamos algumas conclusões e considerações sobre o trabalho desenvolvido. A síntese de problemas que surgiram no decorrer deste estudo e que continuam em aberto servirá, estamos certos, de base para trabalho futuro.

Capítulo 1

Algumas notas preliminares

Neste capítulo apresentamos as notações usadas ao longo desta monografia, assim como algumas definições presentes nos vários problemas de completamento de matrizes posteriormente considerados.

Começamos por apresentar as ideias basilares dos problemas de completamento de matrizes em geral, bem como uma resenha histórica dos principais problemas desta área estudados nas últimas décadas.

Tendo em vista a abordagem combinatorial seguida ao longo de todo este estudo, procuramos disponibilizar, numa breve síntese, os conceitos de teoria de grafos necessários para a compreensão deste trabalho.

Assumindo o conhecimento, por parte do leitor, de elementos de teoria de matrizes, optamos por apresentar, relativamente a conceitos básicos dessa área, apenas, as notações adoptadas. Introduzimos, ainda neste capítulo, algumas classes de matrizes sobre o corpo dos reais cujos conceitos, traduzidos para o campo das matrizes parciais, nos permitem enunciar os problemas de completamento que nos propomos estudar.

Antes de iniciarmos o nosso estudo de problemas de completamento de matrizes, é importante apresentarmos as notações adoptadas ao longo desta monografia.

Todas as matrizes têm elementos sobre o corpo \mathbb{R} dos reais ou sobre o corpo \mathbb{C} dos complexos.

Denotamos o conjunto das matrizes $n \times 1$ sobre \mathbb{R} por \mathbb{R}^n . \mathbb{C}^n denotará o conjunto das matrizes desse tipo sobre \mathbb{C} . Chamamos *n-vector* a qualquer matriz $n \times 1$ (sobre \mathbb{R} ou sobre \mathbb{C}). Os *vectores unitários de ordem n*, pertencentes a \mathbb{R}^n , são definidos como

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$ sobre \mathbb{R} , escrevemos $A \geq 0$ se todas as entradas de A são não negativas. Analogamente, escrevemos $A \leq 0$, $A > 0$ e $A < 0$ se todas as entradas de A são não positivas, positivas e negativas, respectivamente. $A \not\geq 0$ significará que nem todas as entradas de A são não negativas e num mesmo sentido usaremos as notações análogas correspondentes às negações das restantes relações.

Dada uma qualquer *matriz de permutação* P , note-se que podemos descrever P a partir da listagem dos vectores unitários que compõem as suas colunas. De facto, se a entrada (i_k, k) é a entrada não nula da k -ésima coluna de P , $k = 1, \dots, n$, podemos escrever $P = [e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}]$.

O *produto de Hadamard* de duas matrizes $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ e $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ é simplesmente o produto elemento a elemento $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$.

Dados dois vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x e y são *sinál-relacionados* se pelo menos uma das coordenadas do produto de Hadamard $x \circ y$ é positiva. Dado x não nulo, podemos considerar uma matriz de permutação P tal que

$$Px = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

satisfaz $X_1 > 0$, $X_2 < 0$ e $X_3 = 0$. Consideremos a partição

$$Py = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

do vector Py como em Px . x e y dizem-se *duplamente sinal-relacionados* se se verificam as seguintes condições:

- i. $X_1 \circ Y_1 \not\leq 0$ e $X_2 \circ Y_2 \not\leq 0$;
- ii. Se X_1 é vazio e X_3 é não vazio, então $Y_3 \geq 0$ e se X_2 é vazio e X_3 é não vazio, então $Y_3 \leq 0$.

Note-se que a condição i. implica que x e y são sinal-relacionados.

Se A é uma matriz quadrada, representamos por $\det A$ o *determinante* de A . Denotamos a *inversa* de A , caso exista, por A^{-1} . $r(A)$ representa a *característica* da matriz A e $\rho(A)$ denota o raio espectral de A . A *transposta* de uma matriz A é denotada por A^T , sendo a *transconjugada* de A representada por A^* .

Denotamos por I_n a matriz identidade de ordem n . Caso a dimensão da matriz esteja implícita no contexto, denotamos, em alternativa, a matriz identidade por I .

Por uma questão de simplificação de escrita, $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ denotará a matriz diagonal $n \times n$

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Dizemos que uma tal matriz diagonal é positiva se todos os elementos da diagonal principal d_1, d_2, \dots, d_n são positivos.

Dada uma matriz A , $n \times n$, denotamos por $A[\alpha|\beta]$ a submatriz obtida suprimindo de A as linhas cujos índices não estão em α e as colunas cujos índices não estão em β , com $\alpha, \beta \subseteq \{1, \dots, n\}$. Abreviamos $A[\alpha|\alpha]$ com $A[\alpha]$.

Por vezes será mais conveniente indicar a submatriz via exclusão, em vez de via inclusão, de linhas ou colunas. A notação é a seguinte: $A[\alpha'|\beta']$ é a submatriz resultante da exclusão das linhas indicadas por α e das colunas indicadas por β . Escrevemos $A[\alpha']$ em vez de $A[\alpha'|\alpha']$.

Assim, $\det A[\alpha|\beta]$ representará o determinante da submatriz $A[\alpha|\beta]$ de A , sempre que $|\alpha| = |\beta|$.

A seguinte *identidade de Jacobi* generaliza a fórmula com a matriz adjunta para a inversa de uma matriz regular e relaciona os menores da inversa com os da própria matriz

$$\det A^{-1}[\alpha'|\beta'] = (-1)^{(\sum_{i \in \alpha} i + \sum_{j \in \beta} j)} \frac{\det A[\beta|\alpha]}{\det A}.$$

Para submatrizes principais, esta fórmula pode ser reescrita como

$$\det A^{-1} [\alpha'] = \frac{\det A [\alpha]}{\det A}.$$

Os determinantes $\det A [\{1\}]$, $\det A [\{1, 2\}]$, \dots , $\det A [\{1, 2, \dots, n\}]$ são designados *menores principais descendentes*.

Apresentamos, de seguida, as ideias base da chamada teoria de completamento de matrizes parciais.

1.1 Teoria de Completamento

A resolução de problemas em Ciência, em Engenharia e nas Ciências Sociais modelizados através de técnicas matriciais passa frequentemente pela determinação de algumas entradas de uma dada matriz por forma a que a matriz obtida tenha certas propriedades previamente prescritas.

A *Teoria de Completamento* engloba estes problemas e tem a sua génese nos meados do século XX. Podemos, no entanto, incluir nesta teoria vários problemas clássicos.

A classificação de um sistema de equações lineares com parâmetros pode, com efeito, ser visto como um problema da Teoria de Completamento. Pensando na discussão do sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & k \\ 1 & t & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a resolução desta questão passa pela determinação de valores para as entradas $(1, 3)$, $(2, 2)$ e $(2, 3)$ da matriz de coeficientes para os quais o sistema é possível, determinado ou indeterminado, ou impossível.

O problema do cálculo dos valores próprios de uma matriz traduz-se na determinação dos valores de λ para os quais a matriz $B = A - \lambda I$ tem determinante nulo.

Na classificação dos pontos críticos de uma função de várias variáveis dependente de um parâmetro, precisamos de determinar algumas entradas da matriz Hessiana, calculada em cada ponto crítico, de modo a que a forma quadrática que esta matriz define seja definida positiva, definida negativa ou indefinida.

Muitos outros tipos de problemas podem ser entendidos como problemas de completamento de matrizes, incluindo, por exemplo, questões de gestão de empresas.

Em todos estes problemas procuramos determinar algumas entradas de uma ou mais matrizes por forma a obter matrizes com determinadas propriedades. Este tipo de questão parte dos objectos centrais desta monografia: as *matrizes parciais*. Um conceito extremamente simples: quadros ordenados de nm elementos a_{ij} ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$) escritos na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

em que algumas das entradas a_{ij} são especificadas, isto é, elementos conhecidos de um dado conjunto, e as restantes não são prescritas, sendo tratadas como variáveis independentes livres, usualmente sobre o mesmo conjunto e usualmente denotadas por '?'s.

Representaremos uma matriz parcial da forma descrita por $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ e diremos que tal matriz parcial é *do tipo* $n \times m$ ou, simplesmente, $n \times m$. Quando $n = m$, A diz-se uma *matriz parcial quadrada*. Nesse caso, dizemos, ainda, que A é uma *matriz parcial de ordem* n .

Dada uma matriz parcial A do tipo $n \times m$, chama-se *padrão da matriz* A ao conjunto dos pares (i, j) de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ tais que (i, j) é uma entrada especificada de A . Representamos por Γ_A o padrão da matriz parcial A .

Exemplo 1.1. Sobre o corpo dos reais, a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? & -3 \\ ? & -2 & ? & ? \\ ? & 1 & ? & 0 \\ 1 & ? & ? & 6 \end{bmatrix}$$

tem como padrão o seguinte conjunto de pares

$$\Gamma_A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}.$$

Um *completamento* de uma matriz parcial é a matriz convencional resultante de uma escolha particular de valores (do conjunto indicado) para as entradas não prescritas.

Exemplo 1.2. A matriz

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -3 \\ -3 & -2 & 11 & 0,5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7,2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

é um completamento da matriz parcial A do exemplo anterior.

Chamamos *completamento nulo* de uma matriz parcial A ao completamento obtido especificando as entradas não prescritas de A com 0. Representamos este completamento de A por A_0 .

Relativamente ao padrão das entradas especificadas, classificamos as matrizes parciais quadradas de matrizes parciais combinatorialmente simétricas e de matrizes parciais não combinatorialmente simétricas. Uma matriz parcial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ diz-se *combinatorialmente simétrica* quando a_{ij} é especificado se e somente se a_{ji} é especificado, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, e *não combinatorialmente simétrica* caso contrário.

Um caso particular de matrizes parciais não combinatorialmente simétricas com especial relevância em alguns problemas de completamento de matrizes são as *matrizes parciais triangulares superiores*, cujas entradas conhecidas são exatamente as entradas nas posições (i, j) , $i \leq j$.

Uma matriz parcial A , $n \times n$, diz-se *reduzível* se existe uma matriz de permutação P tal que

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ X_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix},$$

onde X_{ij} é uma matriz parcial rectangular sem entradas especificadas, para $i = 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, i-1$, e A_{ij} , do tipo $n_i \times n_j$, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = i+1, \dots, p$, é uma matriz parcial ou uma matriz convencional. Uma matriz parcial diz-se *irreduzível* se não é reduzível.

Relembremos que uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é *sinal-simétrica* se $a_{ij}a_{ji} > 0$ ou $a_{ij} = a_{ji} = 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Uma matriz parcial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ diz-se *sinal-simétrica* se $a_{ij}a_{ji} > 0$ ou $a_{ij} = a_{ji} = 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que ambas as entradas (i, j) , (j, i) são especificadas. Um conceito análogo surge associado à simetria de sinal fraca. Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é *fracamente sinal-simétrica* se $a_{ij}a_{ji} \geq 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Uma

matriz parcial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ diz-se *fracamente sinal-simétrica* se $a_{ij}a_{ji} \geq 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que ambas as entradas $(i, j), (j, i)$ são especificadas.

A questão de base que se coloca num *problema de completamento de matrizes* é se existe ou não um completamento de uma dada matriz parcial pertencente a uma determinada classe de interesse (por exemplo, definida positiva, M -matriz ou característica não superior a k).

A abordagem deste tipo de problemas deve ter em conta o padrão da matriz parcial e o conceito prescrito pela classe de matrizes de interesse.

Muitas vezes existem condições necessárias óbvias que a matriz parcial tem de satisfazer para que exista um completamento na classe desejada. Se procuramos um completamento de uma matriz parcial quadrada que seja uma matriz Hermítica, é claro que essa matriz parcial terá de ser Hermítica até ao ponto em que o podemos analisar, isto é, se ambas as entradas $(i, j), (j, i)$ são especificadas, então terão de ser complexos conjugados, e se a entrada (i, j) é especificada, poderemos também assumir que a entrada (j, i) é especificada. Classificaremos as matrizes parciais que satisfazem estas condições necessárias óbvias de forma natural. Por exemplo, uma *matriz Hermítica parcial* é uma matriz parcial quadrada em que a entrada (i, j) é especificada se e somente se a entrada (j, i) é especificada e é o seu conjugado complexo.

Nalguns casos, estas condições necessárias óbvias são ligeiramente mais subtilezas. Se queremos completar uma matriz Hermítica parcial por forma a obtermos uma matriz definida positiva, então todas as submatrizes principais totalmente especificadas terão de ser definidas positivas. Este tipo de condições necessárias advém de propriedades herdadas pelas submatrizes principais. Restringindo o estudo às matrizes parciais que satisfazem as tais condições necessárias óbvias, coloca-se a questão sobre a existência ou não de um completamento na classe desejada.

Em geral, tais completamentos não existem e aqui entra a metodologia combinatorial. Procuramos, então, caracterizar quais os padrões de entradas especificadas *versus* não especificadas que nos permitem garantir a existência do completamento desejado sempre que as condições necessárias óbvias são satisfeitas. Podemos, de forma simples e clara, descrever esses padrões através de grafos, como veremos mais tarde.

Apresentamos, de seguida, alguns problemas de completamento de matrizes parciais que fazem a história desta área e que numerosos investigadores continuam a estudar. Durante as exposições que desenvolvemos, optamos por descrever alguns dos resultados conhecidos para cada problema, sendo, por vezes, inevitável

recorrer a definições apresentadas apenas na secção que se segue.

Um dos primeiros problemas de completamento a ser estudado foi o *problema de completamento de valores próprios*: dada uma matriz parcial quadrada, pretende-se analisar a existência de um seu completamento com espectro fixo. Em 1958, Mirsky apresentou um primeiro resultado relativo a matrizes parciais com espectro e elementos da diagonal principal prescritos (ver [63]). Friedland [15] e Silva [70] consideraram o padrão complementar e resolveram o problema para matrizes parciais cujas entradas não especificadas são, exactamente, as da diagonal principal. Outros autores consideraram o problema para matrizes parciais com uma submatriz principal totalmente especificada ou um bloco diagonal. No primeiro caso, o problema foi resolvido por Thompson em [72] e por Marques de Sá em [57]. De Oliveira e Silva trabalharam o problema para o segundo caso (ver [11] e [71]). Zaballa, em [73], apresenta a solução para o caso em que o padrão da matriz parcial corresponde a um conjunto de filas ou de colunas completas.

Este problema de completamento está estreitamente relacionado com o problema de completamento discutido no livro de Gohberg *et al* (ver [17]) em que, dada uma parte de uma matriz, a tarefa traduz-se em descrever todos os espectros possíveis para completamentos da matriz parcial considerada.

Muitos investigadores, como Gohberg, Rodman, Shalom, Johnson, Krupnic e Chu, continuam a desenvolver trabalho neste problema de completamento.

Um outro conhecido problema de completamento de matrizes é o *problema de Carlson*. Este problema clássico levanta a questão da existência de uma matriz X tal que a matriz

$$\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

tem uma forma de Jordan prescrita, sendo também prescritos os blocos A e B . Facilmente se verifica que este problema se reduz ao caso em que A e B são matrizes totalmente especificadas e nilpotentes e são prescritas, ainda, as características de Segre $\alpha = (n_1, \dots, n_p)$ e $\beta = (m_1, \dots, m_q)$ de A e B , respectivamente. O objectivo será, então, determinar se existe um completamento da matriz parcial considerada cuja característica de Segre é uma sequência γ previamente fixada.

O teorema de Klein garante a existência de pelo menos uma solução do problema de Carlson quando existe uma determinada sequência de Littlewood-Richardson (ver [53]). Klein reduz, assim, o problema de Carlson à existência de sequências de Littlewood-Richardson. A questão natural que se coloca, neste ponto, diz respeito à determinação de condições explícitas para a existência de uma solução e à construção do completamento desejado. Johnson *et al* apresentam, em [38], uma resposta a esta questão para $p = q = 1$

e para $n_i = m_j = 1$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$. Encontramos as tais condições explícitas e a construção do completamento desejado quando $p = 1$ ou $q = 1$ em [7] e em [67], por Carlson, Rodman e Schaps, e quando $p = q = 2$ em [6], por Cantó e Urbano. Baseados numa demonstração geométrica do teorema de Klein, Compta e Ferrer apresentam, em [8], um método para construir soluções explícitas, mostrando, como consequência imediata dessa construção, que todas as possíveis características de Segre de completamentos da matriz parcial inicialmente considerada aparecem em qualquer vizinhança de determinadas soluções.

O problema de completamento de matrizes parciais com forma de Jordan prescrita foi inicialmente considerado por Rodman e Shalom, em [68], para matrizes parciais triangulares superiores, cujas entradas especificadas são exactamente as da parte triangular superior. Nesse trabalho, os autores conjecturam condições necessárias e suficientes para a existência de um completamento com a forma de Jordan fixada, demonstrando a validade desta conjectura para matrizes parciais triangulares superiores de ordem n com $n \leq 4$. Jordán, Torregrosa e Urbano continuam este estudo, provando a veracidade da conjectura para o caso em que $n = 5$ e apresentando um contra-exemplo para $n \geq 6$ (ver [44] e [46]). Na sequência destes trabalhos, estes autores consideram o problema de completamento para matrizes de Jordan parciais, analisando as possíveis formas canónicas de Jordan de completamentos com base no conceito de majoração respeitante a sequências de inteiros (ver [45]). Seguindo esta linha orientadora, temos, também, o trabalho de Krupnik e Rodman para matrizes de Hessenberg parciais (ver [54]).

Dada uma matriz parcial, podemos questionar-nos sobre o mínimo do conjunto das características dos seus completamentos a que chamamos característica mínima da matriz parcial considerada. Esta questão, o *problema da característica mínima*, é de abordagem complexa e apenas resultados parciais são conhecidos. Podemos, no entanto, encontrar vários problemas que se intersectam com o cálculo da característica mínima, como o estudo de representações minimais de sistemas lineares de entrada-saída, o problema de realização parcial e os problemas de completamento de uma matriz e da sua inversa.

Podemos encontrar, na literatura, uma série de *problemas de completamento relacionados com a Teoria de Controlo*. Essas questões enquadram-se em dois problemas básicos. Num primeiro problema, dado um sistema invariante em tempo discreto descrito por um par de matrizes parciais (A, B) , em que A é do tipo $n \times n$ e B é do tipo $n \times m$, é analisada a possibilidade de completar as matrizes parciais por forma a obter um sistema completamente controlável. Num segundo problema, considerando o sistema (A, B) com B completa, é estudada a existência de um completamento A_c de A para o qual o par (A_c, B) tenha índices

de controlabilidade ou sucessão de r -números prescritos. Relativamente ao primeiro problema descrito, Gurvits, Rodman e Shalom consideram, em [23], o caso em que A é uma matriz parcial triangular superior, irredutível inferior, e B é um vector coluna. Nestas condições, é garantida a existência do completamento desejado. Jordán, Torregrosa e Urbano descrevem, em [47], um algoritmo para obter esse completamento e, em [48], abordam o problema para matrizes parciais A com determinados tipos de grafos das entradas especificadas. O segundo problema é tratado, por estes mesmos autores, em [47], [49] e [50].

No *problema de completamento de matrizes definidas positivas parciais* pretende-se estudar a existência ou não de um completamento de uma dada matriz definida positiva parcial que seja uma matriz definida positiva. Este problema tem várias aplicações e intersecta-se com outros problemas de completamento, podendo, ainda, ser visto como um problema fundamental da geometria euclidiana. Grone *et al* começam por abordar esta questão em [21], onde mostram que o completamento desejado existe se o grafo das entradas especificadas é cordal. Apresentam, ainda, para o caso em que o referido grafo é não cordal, exemplos de matrizes definidas positivas parciais que não admitem matrizes definidas positivas como completamentos. Barrett, Johnson e Loewy analisam, então, os chamados grafos críticos para este problema de completamento (ver [2]) e no seguimento deste trabalho podemos encontrar resultados parciais sobre condições necessárias ou suficientes para a completabilidade de matrizes parciais desta classe com tipos específicos de grafos associados.

Johnson e Kroschel apresentam, em [36], o *problema de completamento de P -matrizes parciais*: dada uma P -matriz parcial, o objectivo é averiguar a existência de um seu completamento com todos os menores principais positivos. Nesse trabalho, os autores mostram que toda a P -matriz parcial combinatorialmente simétrica pode ser completada de modo a obter-se uma P -matriz e analisam, ainda, o caso em que esta condição de simetria combinatorial não é exigida. Encontramos uma continuação desta análise em [9], com resultados parciais para o caso não combinatorialmente simétrico, incidindo, essencialmente, sobre matrizes de pequena dimensão. Posteriormente, Fallat, Johnson, Torregrosa e Urbano abordam o problema adicionando condições de positividade, simetria de sinal, etc. sobre as entradas especificadas da P -matriz parcial. Estudam também a completabilidade de P -matrizes parciais com determinados tipos de grafos associados (ver [13]). Neste sentido, encontramos novos resultados em [52].

O *problema de completamento de M -matrizes parciais* parte da questão base sobre a possibilidade de completar uma M -matriz parcial por forma a obter uma P -matriz com elementos não diagonais não positivos. Podemos encontrar esta

classe de matrizes estáveis positivas reais em variadas áreas de aplicação e este problema de completamento foi estudado por Johnson e Smith, em 1996. Estes autores apresentam uma condição necessária e suficiente para que uma M -matriz parcial admita o completamento desejado, independente do padrão da matriz (ver [39]). Hogben aborda este mesmo problema em [26], mas numa perspectiva combinatorial, apresentando condições sobre o padrão da matriz parcial.

Johnson e Smith introduzem, também em [39], o estudo do *problema de completamento de M -matrizes inversas parciais*: dada uma M -matriz inversa parcial, pretende-se estudar a existência de um seu completamento invertível cuja inversa seja uma M -matriz. Estes autores consideram o caso combinatorialmente simétrico, mostrando a existência do completamento desejado para as M -matrizes inversas parciais cujos grafos das entradas especificadas são 1-cordais e apresentando contra-exemplos para os restantes tipos de grafos. O caso não combinatorialmente simétrico é abordado por Hogben em [25] e [27] e por Jordán, Torregrosa e Urbano em [51]. Hogben mostra que toda a M -matriz inversa parcial cujo digrafo associado é acíclico sem caminhos totalmente especificados admite uma M -matriz inversa como completamento. Jordán *et al* complementam este resultado em [51], apresentando de forma explícita um completamento na classe de interesse e com a propriedade de ter zeros nas entradas da inversa correspondentes às entradas não especificadas da matriz parcial inicial. Hogben apresenta, ainda, condições necessárias e suficientes para a completabilidade de M -matrizes inversas parciais cujo digrafo associado é um ciclo.

Com uma filosofia análoga aos problemas precedentes, no *problema de completamento de matrizes totalmente não negativas parciais* analisa-se sobre que condições uma matriz totalmente não negativa parcial admite como completamento uma matriz totalmente não negativa. Este problema foi inicialmente considerado por Johnson, Kroschel e Lundquist, em [37], para matrizes parciais combinatorialmente simétricas. Os resultados aí descritos garantem a existência do completamento desejado para matrizes parciais com grafos 1-cordais monotona-mente etiquetados associados. Para os restantes casos, o trabalho traduz-se no estudo de condições necessárias e suficientes para a completabilidade da matriz parcial considerada. Fallat *et al* abordam, em [12], o problema para o caso não combinatorialmente simétrico, obtendo resultados parciais para matrizes parciais com poucas entradas não especificadas.

Neste nosso trabalho, centraremos o nosso estudo em determinados problemas de completamento de matrizes que envolvem condições sobre os determinantes (procuraremos completamentos de matrizes parciais com todos os menores principais negativos, completamentos com todos os menores não positivos, com-

pletamentos que sejam P -matrizes positivas simétricas, etc.). Atendendo a que algumas destas propriedades que vamos considerar são invariantes se uma determinada transformação de semelhança é efectuada sobre a matriz, é natural que tentemos simplificar o problema usando transformações de semelhança. No entanto, nem todas as semelhanças podem ser consideradas.

Sejam A e B duas matrizes parciais de ordem n e Γ_A e Γ_B os padrões de A e de B , respectivamente. Uma matriz invertível S , $n \times n$, diz-se uma *matriz de semelhança admissível* de A e B se, para todo o completamento A_c de A , a matriz SA_cS^{-1} é um completamento de B e se, para todo o completamento B_c de B , a matriz $S^{-1}B_cS$ é um completamento de A . Assim, se S é uma matriz de semelhança admissível de A e B , então, para cada completamento A_c de A , as entradas b_{ij} de SA_cS^{-1} com $(i, j) \in \Gamma_B$ dependem apenas de S e das entradas a_{ij} de A_c com $(i, j) \in \Gamma_A$, e não das entradas de A_c não pertencentes a Γ_A . Temos, ainda, reciprocamente, que as entradas a_{ij} de $S^{-1}B_cS$ com $(i, j) \in \Gamma_A$ dependem somente de S e das entradas b_{ij} de B_c com $(i, j) \in \Gamma_B$, para qualquer completamento B_c de B . Por uma questão de simplificação, diremos que A e B são *semelhantes* e escreveremos $B = SAS^{-1}$. Note-se que as entradas especificadas da matriz parcial B são descritas apenas a partir das entradas da matriz S e das entradas especificadas da matriz parcial A .

1.2 Teoria de Grafos

Nos últimos anos, a teoria de grafos tem tido um papel bastante relevante no estudo de problemas de completamento de matrizes. A abordagem combinatorial apresenta-se amiúde como uma melhor alternativa quando comparada com abordagens analíticas, algébricas ou geométricas.

Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto finito não vazio $V(G)$, cujos elementos se designam por *vértices*, e de um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de vértices, denominados por *arestas*. Não havendo ambiguidade, falamos de V em vez de $V(G)$ e de E em vez de $E(G)$. Designamos por *ordem do grafo* G o número de vértices de G .

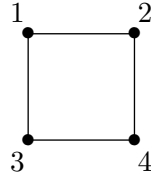
Um *subgrafo* de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um grafo $H = (V(H), E(H))$, onde $V(H)$ é um subconjunto de $V(G)$ e $E(H)$ é um subconjunto de $E(G)$ (note-se que se $\{i, j\}$ é um elemento de $E(H)$, então i, j pertencem a $V(H)$, uma vez que H é um grafo). Dado um conjunto S de vértices de G , o *subgrafo induzido* $\langle S \rangle$ é o subgrafo maximal de G cujo conjunto de vértices é S , ou seja, é o subgrafo (S, E) de G , onde $E = \{\{i, j\} \in E(G) \mid i, j \in S\}$.

Toda a matriz parcial combinatorialmente simétrica pode ser descrita de modo natural através do seu *grafo associado*. A uma matriz parcial combinatorialmente simétrica A , $n \times n$, associamos o grafo $G_A = (V, E)$, onde o conjunto de vértices V é $\{1, \dots, n\}$ e a aresta $\{i, j\}$, $i \neq j$, é um elemento de E se e só se a entrada (i, j) (e, portanto, também a entrada (j, i)) é especificada. Atendendo a que nos problemas de completamento de matrizes em estudo assumimos que todas as entradas diagonais são prescritas, omitimos os *lacetes* (ou seja, as arestas (i, i) , com $i \in \{1, \dots, n\}$).

Exemplo 1.3. O grafo associado à matriz parcial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ? \\ ? & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & ? & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

é o grafo



Um grafo é *completo* se inclui todas as arestas possíveis entre os seus vértices.

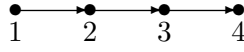
Um *grafo dirigido* ou *digrafo* $D = (V(D), E(D))$ consiste de um conjunto finito não vazio $V(D)$, sendo os seus elementos designados por *vértices*, e de um conjunto $E(D)$ de pares ordenados de vértices, chamados *arcos* ou *arestas dirigidas*. Os conceitos de *ordem do digrafo* D , de *subgrafo dirigido* e de *subgrafo dirigido induzido* são definidos de modo análogo aos correspondentes conceitos para grafos.

Dada uma qualquer matriz parcial A , $n \times n$, associamos a A o digrafo $D_A = (V, E)$, onde o conjunto de vértices V é $\{1, \dots, n\}$ e o arco (i, j) , $i \neq j$, é um elemento de E se e só se a entrada (i, j) é especificada. D_A é denominado por *grafo dirigido associado* ou *digrafo associado* a A .

Exemplo 1.4. A matriz parcial não combinatorialmente simétrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & ? \\ ? & a_{22} & a_{23} & ? \\ ? & ? & a_{33} & a_{34} \\ ? & ? & ? & a_{44} \end{bmatrix}$$

pode ser descrita pelo seu digrafo associado



O *grafo subjacente* a um digrafo é o grafo obtido substituindo cada arco (i, j) ou cada par de arcos $(i, j), (j, i)$ pela aresta $\{i, j\}$. Note-se que o grafo subjacente ao grafo dirigido associado a uma matriz parcial combinatorialmente simétrica coincide com o grafo associado a essa matriz parcial.

Renumerar os vértices de um grafo (digrafo) corresponde a efectuar uma semelhança de permutação na matriz parcial à qual o grafo (digrafo) é associado. Sempre que a classe de matrizes considerada no problema de completamento é invariante para as semelhanças de permutação, temos, pois, a liberdade de renumerar os vértices do grafo (digrafo) como entendermos.

Dado que a forma ou o comprimento de uma aresta e a sua posição no espaço não são especificações de um grafo, cada grafo tem inúmeras representação espaciais. Decidir quando dois diagramas representam um mesmo grafo pode ser uma tarefa árdua mesmo para grafos com poucos vértices e arestas. Um problema relacionado com este tipo de tarefa é decidir quando é que dois grafos com diferentes especificações são estruturalmente equivalentes.

Um *isomorfismo de grafos* do grafo G_1 no grafo G_2 é uma bijecção $f : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$ tal que $\{i, j\} \in E(G_1)$ se e só se $\{f(i), f(j)\} \in E(G_2)$. Dois grafos G_1 e G_2 dizem-se *isomorfos* se existe um isomorfismo de grafos de G_1 em G_2 . Escrevemos $G_1 \cong G_2$.

Digrafos isomorfos têm a definição esperada. Dois digrafos D_1 e D_2 são *isomorfos* se existe uma bijecção (um *isomorfismo de digrafos*) f de $V(D_1)$ em $V(D_2)$ tal que (i, j) é um arco de D_1 se e somente se $(f(i), f(j))$ é um arco de D_2 . Escrevemos $D_1 \cong D_2$.

Há determinados tipos de grafos (digrafos) que têm tido um papel mais preponderante em estudos de problemas de completamento e que descrevemos de seguida.

Um *caminho* num grafo (grafo dirigido) é uma sequência de arestas (respectivamente arcos) $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}$ (respectivamente $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$) em que os vértices são distintos, excepto, possivelmente, o primeiro e o último. O *comprimento* de um caminho é o número das suas arestas (arcos). O grafo dirigido associado à matriz parcial do exemplo 1.4 é um caminho de comprimento 3. Um *ciclo* é um caminho fechado, ou seja, um caminho em que o primeiro e o último vértice coincidem. Por abuso de linguagem, designaremos por *caminho* um caminho não fechado e usaremos apenas a terminologia *ciclo*

para nos referirmos a caminhos fechados. O grafo associado à matriz parcial combinatorialmente simétrica do exemplo 1.3 é um ciclo de comprimento 4. Um *semiciclo* é um digrafo cujo grafo subjacente é um ciclo.

Um grafo diz-se *conexo* se existe um caminho de um qualquer vértice para outro qualquer vértice. Uma *componente conexa* de um grafo é um seu subgrafo conexo maximal. Um digrafo diz-se *conexo* se o seu grafo subjacente é conexo e uma *componente conexa* de um digrafo é uma componente conexa do seu grafo subjacente. Um digrafo diz-se *fortemente conexo* caso exista um caminho de um qualquer vértice para outro qualquer vértice.

Dizemos que uma matriz parcial A é *diagonal por blocos* se admite uma partição da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & ? & \dots & ? \\ ? & A_2 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & A_k \end{bmatrix},$$

onde $?$ representa um conjunto rectangular de posições não especificadas e cada A_i é uma matriz parcial, $i = 1, \dots, k$.

Note-se que se A é uma matriz parcial cujo grafo associado G é não conexo, então A é uma matriz parcial diagonal por blocos e cada um dos grafos associados a cada um dos blocos diagonais é uma das componentes conexas de G .

Uma *corda* de um ciclo $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, i_1\}$ é uma aresta $\{i_s, i_t\}$ que não está no ciclo (com $1 \leq s, t \leq k$). Uma *corda* de um ciclo num digrafo é um arco cuja aresta correspondente é uma corda do ciclo correspondente no grafo subjacente.

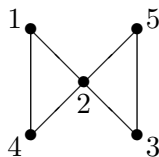
Os grafos não dirigidos dividem-se em *cordais* e *não cordais*.

Um grafo diz-se *cordal* se nenhum subgrafo induzido por um conjunto de vértices é um ciclo de comprimento superior ou igual a 4 ou, equivalentemente, se todo o ciclo de comprimento superior ou igual a 4 tem uma corda. Na literatura especializada, este tipo de grafos é também denominado por *grafos triangulizados*, *grafos monótono-transitivos* e *grafos de eliminação perfeita*.

Exemplo 1.5. Associado à matriz parcial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ? & a_{14} & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ ? & a_{32} & a_{33} & ? & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & ? & a_{44} & ? \\ ? & a_{52} & a_{53} & ? & a_{55} \end{bmatrix},$$

temos o seguinte grafo cordal:



Os grafos cordais são bastante importantes no estudo de problemas de completamento de matrizes e podem ser entendidos como a seguir descrevemos.

Um *clique* num grafo é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo. Um clique diz-se *maximal* se os seus vértices não constituem um subconjunto próprio de um clique.

Podemos encarar os grafos cordais como tendo uma estrutura semelhante a uma *árvore* em que os cliques maximais são vistos como vértices. De facto, um grafo é cordal se e só se pode ser sequencialmente construído a partir de grafos completos através da identificação de um clique do grafo completo a adicionar com um clique do grafo construído até ao momento.

Os blocos completos são os cliques maximais do grafo cordal resultante e os cliques da identificação, denominados por *vértices separadores minimais*, são intersecções destes cliques maximais.

Esta estrutura dos grafos cordais, semelhante a uma árvore, é apresentada e descrita com mais pormenores em [4].

Todo o grafo deste tipo, com dois cliques maximais, admite, a menos de semelhança de permutação, uma representação matricial da forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & ? \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline ? & A_{32} & A_{33} \end{array} \right],$$

onde cada matriz A_{ij} é totalmente especificada e todo o bloco diagonal A_{ii} é uma matriz quadrada. Note-se que o bloco A_{22} corresponde ao vértice separador minimal.

Tendo em conta esta construção dos grafos cordais, classificamos este tipo de grafos em termos do número de vértices nas intersecções dos cliques maximais. Se o número máximo de vértices nos cliques de intersecção dos cliques maximais é p , o grafo cordal diz-se p -cordal.

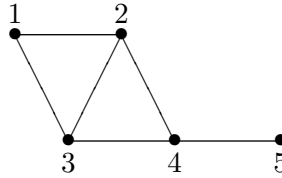
Um grafo p -cordal diz-se *monotonamente etiquetado* se existe uma ordenação dos seus cliques maximais de forma a que para cada par de cliques maximais K_i

e K_j , com $i < j$ e $V(K_i) \cap V(K_j) = V$, a numeração dos vértices em K_i e K_j é tal que todo o elemento de $\{u \mid u \in V(K_i) - V\}$ é etiquetado com um número inferior a todo o elemento de V e todo o elemento de $\{u \mid u \in V(K_j) - V\}$ é etiquetado com um número superior a todo o elemento de V .

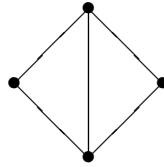
Exemplo 1.6. O grafo associado à matriz parcial

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ? & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ? \\ \hline ? & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ ? & ? & ? & a_{54} & a_{55} \end{array} \right]$$

é o seguinte grafo 2-cordal monotonamente etiquetado

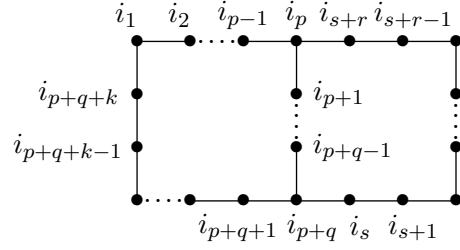


Atendendo a que, num grafo cordal, todo o ciclo de comprimento superior ou igual a 4 tem uma corda, facilmente se verifica que todo o grafo p -cordal, com $p \geq 2$, admite um *duplo triângulo* como subgrafo induzido:



Dentro dos grafos não cordais, têm especial importância os ciclos. Combinando ciclos podemos gerar novos tipos de grafos que serão importantes nos problemas de completamento que analisaremos ao longo desta monografia.

Um grafo diz-se um *duplo ciclo* se é uma sequência de arestas $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{p-1}, i_p\}, \{i_p, i_{p+1}\}, \dots, \{i_{p+q-1}, i_{p+q}\}, \{i_{p+q}, i_{p+q+1}\}, \dots, \{i_{p+q+k-1}, i_{p+q+k}\}, \{i_{p+q+k}, i_1\}, \{i_{p+q}, i_s\}, \{i_s, i_{s+1}\}, \dots, \{i_{s+r-1}, i_{s+r}\}, \{i_{s+r}, i_p\}$, com $q \geq 0$. Quando $q = 0$, temos um duplo ciclo com um vértice em comum. Se $q \geq 1$, temos um duplo ciclo com q arestas em comum. Consideremos a representação de um duplo ciclo não dirigido:



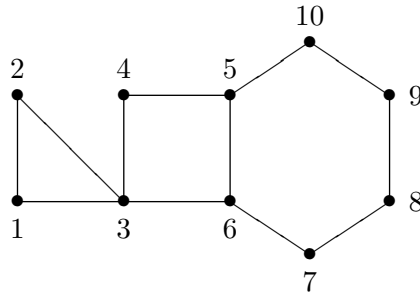
Podemos identificar, facilmente, dois ciclos que têm em comum as q arestas $(i_p, i_{p+1}), \dots, (i_{p+q-1}, i_{p+q})$.

Apresentamos, de seguida, uma generalização desta estrutura de grafos: um *bloco-ciclo* é um grafo formado por uma colecção de ciclos $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ tal que Γ_i e Γ_j têm um vértice em comum ou $h_{ij} \geq 1$ arestas em comum se e somente se $j = i - 1$ ou $j = i + 1$.

Exemplo 1.7. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ? & a_{36} & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & a_{43} & a_{44} & a_{45} & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & a_{54} & a_{55} & a_{56} & ? & ? & ? & a_{510} \\ ? & ? & a_{63} & ? & a_{65} & a_{66} & a_{67} & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & a_{76} & a_{77} & a_{78} & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & a_{87} & a_{88} & a_{89} & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & a_{98} & a_{99} & a_{910} \\ ? & ? & ? & ? & a_{105} & ? & ? & ? & a_{109} & a_{1010} \end{bmatrix}.$$

O grafo associado à matriz parcial A é o seguinte bloco-ciclo, formado por três ciclos:



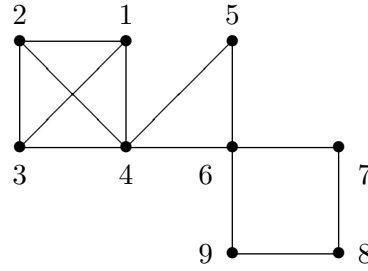
Podemos, ainda, pensar num outro tipo de grafos, construído a partir de ciclos e de cliques. Um *grafo-bloco* é um grafo formado por uma colecção de blocos, consistindo de simples ciclos e cliques, começando com um bloco e adicionando

outros blocos, identificando exactamente um vértice de cada novo bloco com exactamente um vértice do grafo anteriormente construído.

Exemplo 1.8. O grafo associado à matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & ? & ? & ? & ? & ? \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & ? & ? & ? & ? & ? \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ? & ? & ? & ? & ? \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & a_{54} & a_{55} & a_{56} & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & ? & a_{69} \\ ? & ? & ? & ? & ? & a_{76} & a_{77} & a_{78} & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ ? & ? & ? & ? & ? & a_{96} & ? & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix}$$

é o seguinte grafo-bloco:



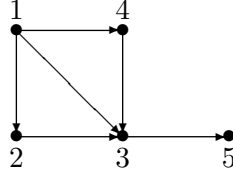
Relativamente aos grafos dirigidos, consideramos dois grupos: os *digrafos acíclicos*, se não contêm ciclos como subdigrafos, e os *não acíclicos*. Dentro deste segundo grupo, podemos incluir os *duplos ciclos dirigidos* e os *bloco-ciclos dirigidos*. Em ambos os casos, a definição é análoga à apresentada para grafos não dirigidos.

Dado um grafo dirigido G , dizemos que o caminho $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{p-1}, i_p)$ é um *caminho totalmente especificado* se (i_1, i_p) é um arco de G .

Exemplo 1.9. À matriz parcial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & ? \\ ? & a_{22} & a_{23} & ? & ? \\ ? & ? & a_{33} & ? & a_{35} \\ ? & ? & a_{43} & a_{44} & ? \\ ? & ? & ? & ? & a_{55} \end{bmatrix},$$

associamos o grafo dirigido D



Note-se que, em D , o caminho $(1, 2), (2, 3)$ é um caminho totalmente especificado.

De nosso interesse são, também, os digrafos CDUM, definidos por Jordán, Torregrosa e Urbano em [52]. Recordamos, de seguida, alguns conceitos necessários para definir esse tipo de digrafos.

Consideremos um digrafo $D = (V, E)$. Dado um vértice $j \in V$, o *grau de entrada do vértice j* , $d_{in}(j)$, é o número

$$d_{in}(j) = \# \{i \in V \mid i \neq j \text{ e } (i, j) \in E\}$$

e o *grau de saída do vértice j* , $d_{out}(j)$, é o número

$$d_{out}(j) = \# \{i \in V \mid i \neq j \text{ e } (j, i) \in E\}.$$

Admitamos, agora, que D é tal que $V = \{1, \dots, n\}$. Se representarmos os vértices de D ordenados na direcção vertical de cima para baixo de 1 até n , facilmente percebemos a ideia dos conceitos que apresentamos de seguida.

Chamamos *grau de descida do vértice i* , $d_d(i)$, ao número

$$d_d(i) = \# \{j \in V \mid j > i \text{ e } (i, j) \in E\}.$$

Se $d_d(i) = 1$, dizemos que o grau de descida de i é *consecutivo* se $(i, i+1) \in E$ e *não consecutivo* caso contrário. Chamamos *grau de subida do vértice i* , $d_u(i)$, ao número

$$d_u(i) = \# \{j \in V \mid j < i \text{ e } (i, j) \in E\}.$$

Claramente, $d_{out}(i) = d_d(i) + d_u(i)$, para todo o vértice i de V .

A partir destes tipos de graus de um vértice, definimos, então, os digrafos CDUM.

Um grafo dirigido $D = (V, E)$, com $V = \{1, \dots, n\}$, diz-se um *digrafo CDUM* se é isomorfo a um grafo dirigido que satisfaz:

- i. $d_u(i) \leq 1$, para todo o vértice i de V ,

ii. $d_d(i) \leq 1$, para todo o vértice i de V , e se $d_d(i) = 1$, então é consecutivo.

Atendendo a que $d_{out}(i) = d_d(i) + d_u(i)$ para qualquer vértice i de um digrafo CDUM D , o grau de saída de qualquer vértice de D é, obviamente, não superior a 2. Assim, se A é uma matriz parcial cujo grafo associado satisfaz as condições i e ii , então as suas entradas especificadas estão na diagonal principal, na diagonal superior e na parte triangular inferior. Em cada linha, antes da entrada da diagonal principal, existe, no máximo, uma entrada prescrita.

No trabalho atrás referido, podemos encontrar um método para identificar matrizes parciais cujos digrafos associados são digrafos CDUM.

Sejam A uma matriz parcial do tipo $n \times n$ e $D_A = (V, E)$ o seu digrafo associado. Com base nas observações anteriores, facilmente concluímos, não tendo em conta os lacetes, que as condições

(a) existe $j \in V$ tal que $d_{out}(j) \leq 1$ e $d_{in}(j) \leq 1$,

(b) existe $k \in V$, $k \neq j$, tal que $d_{out}(k) \leq 1$,

(c) $d_{out}(h) \leq 2$, para qualquer $h \in V$

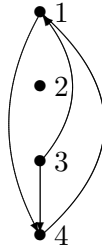
são condições necessárias para que D_A seja um digrafo CDUM.

Como podemos comprovar com o exemplo que se segue, estas condições não são suficientes.

Exemplo 1.10. Consideremos a seguinte matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ? & ? & a_{14} \\ ? & a_{22} & ? & ? \\ a_{31} & ? & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & ? & ? & a_{44} \end{bmatrix}$$

e o seu grafo dirigido associado



Facilmente se verifica que as condições (a), (b) e (c) são satisfeitas. No entanto, o digrafo D_A não é um digrafo CDUM. Suponhamos que existe um digrafo $D =$

$(V(D), E(D))$, com $V(D) = \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $D_A \cong D$ e tal que D satisfaz as condições *i* e *ii*.

Seja $f : V(D_A) \rightarrow V(D)$ um isomorfismo de digrafos. Sabemos, então, que $(f(1), f(4))$, $(f(3), f(1))$, $(f(3), f(4))$ e $(f(4), f(1))$ são arcos de D e que não existe $u \in V(D)$ tal que $(u, f(2)) \in E(D)$ ou $(f(2), u) \in E(D)$.

Se $f(1) = 4$ ou $f(4) = 4$, existiria um vértice de D com grau de descida superior a 1 ou um vértice com grau de descida igual a 1 mas não consecutivo. Se $f(3) = 4$, então $d_u(f(3)) > 1$. Portanto, $f(2) = 4$.

Se $f(3) = 1$ ou $f(3) = 3$, o vértice $f(3)$ teria grau de descida superior a 1 ou grau de subida superior a 1, respectivamente. Logo, podemos concluir que $f(3) = 2$.

Resta-nos, assim, considerar dois casos: ou $f(4) = 1$ ou $f(4) = 3$. No primeiro caso sabemos que $f(1) = 3$, pelo que $(f(4), f(1)) = (1, 3) \in E(D)$. No segundo caso podemos afirmar que $f(1) = 1$, donde $(f(1), f(4)) = (1, 3) \in E(D)$. Em ambos os casos, $d_d(1) = 1$ e é não consecutivo em D , o que contradiz a condição *ii*.

Quando D_A satisfaz as condições (a), (b) e (c) e é conexo, o procedimento que se segue permite-nos obter, caso exista e sempre que se percorram todos os vértices na aplicação do algoritmo, uma matriz de permutação P tal que $D_{A'}$ satisfaz as condições *i* e *ii* da definição de digrafo CDUM, sendo $A' = P^T A P$. Na descrição do procedimento, riscar a linha e a coluna j significa substituir as entradas especificadas não diagonais nessa linha e nessa coluna por entradas não prescritas.

PROCEDIMENTO. Seja $U = \{j_1, j_2, \dots, j_p, j_{p+1}, \dots, j_s\}$ o conjunto de vértices de V que verificam a condição (a) tais que $d_{in}(j_t) = 0$ para $t = p+1, \dots, s$. Seja \bar{A} a matriz parcial obtida riscando as linhas e colunas j_{p+1}, \dots, j_s da matriz parcial A .

Observemos que as linhas e as colunas j_1, j_2, \dots, j_p de \bar{A} têm, no máximo, uma entrada não diagonal especificada.

Escolhemos um vértice $j_h \in U$, $1 \leq h \leq p$, riscamos a linha e a coluna j_h de \bar{A} e chamamos A_{j_h} à matriz parcial resultante. Seja a_{ij_h} a entrada não diagonal especificada na coluna j_h de \bar{A} . Analisemos a linha e a coluna i de A_{j_h} .

- I. Se a linha ou a coluna i de A_{j_h} tem mais do que uma entrada não diagonal especificada, recomeçamos o procedimento com outro vértice não usado j_h de U e a matriz parcial \bar{A} .
- II. Se a linha e a coluna i de A_{j_h} têm, no máximo, uma entrada não diagonal especificada, riscamos a linha e a coluna i de A_{j_h} e chamamos A_i a esta nova matriz parcial.

II.a. Se a_{ki} é a entrada especificada na coluna i de A_{j_h} , analisamos a linha e a coluna k de A_i e assim sucessivamente.

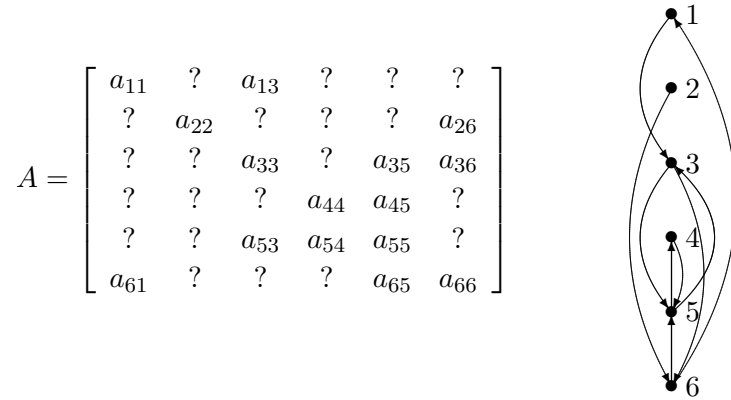
II.b. Se todas as entradas não diagonais da coluna i de A_{j_h} são não prescritas, escolhemos outro vértice não usado j_h de U , riscamos a linha e a coluna j_h de A_i , chamamos A_{j_h} à matriz parcial obtida e aplicamos o procedimento anterior, tendo em conta que consideramos agora a matriz parcial A_i em lugar de \bar{A} .

Se todas as entradas não diagonais na coluna j_h de \bar{A} são não especificadas, escolhemos outro vértice não usado j_r de U , riscamos a linha e a coluna j_r de A_{j_h} e chamamos A_{j_r} à nova matriz parcial. Aplicamos o procedimento anterior, atendendo a que consideramos a matriz A_{j_h} em vez de \bar{A} .

Se aplicamos o procedimento e percorremos todos os vértices $V - \{j_{p+1}, \dots, j_s\}$, obtemos uma matriz de permutação $P = [e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n-s+p)}, e_{j_{p+1}}, \dots, e_{j_s}]$, onde $\sigma(1), \dots, \sigma(n-s+p)$ são os vértices de $V - \{j_{p+1}, \dots, j_s\}$ na ordem inversa em relação ao procedimento. P é tal que o digrafo associado à matriz $A' = P^T A P$ satisfaz as condições *i* e *ii* da definição de digrafo CDUM.

Apresentamos, de seguida, um exemplo de aplicação deste procedimento a uma matriz parcial 6×6 cujo digrafo das entradas especificadas satisfaz as condições necessárias atrás enunciadas.

Exemplo 1.11. Consideremos a seguinte matriz parcial e o respectivo grafo associado



A tabela que se segue resume os graus de entrada e de saída de cada um dos vértices de D_A

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------|---|---|---|---|---|---|
| $d_{in}(i)$ | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| $d_{out}(i)$ | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

Facilmente se comprova que se verificam as condições (a), (b) e (c). Os índices para os quais se verifica a condição (a) são 1, 2 e 4. Definimos, então, o conjunto $U = \{1, 4, 2\}$, sendo $d_i(2) = 0$.

Seja \bar{A} a matriz parcial obtida riscando a linha e a coluna 2 de A .

Escolhemos o vértice 4 de U . Riscamos a linha e a coluna 4 de \bar{A} e chamamos A_4 à matriz parcial obtida. A entrada não diagonal especificada da coluna 4 de \bar{A} é a_{54} . Analisamos, pois, a linha e a coluna 5 de A_4 . Dado que a coluna 5 de A_4 tem duas entradas não diagonais especificadas, recomeçamos o procedimento com outro vértice de U e com a matriz parcial \bar{A} .

Consideramos, então, o vértice 1 de U . Riscamos a linha e a coluna 1 de \bar{A} e obtemos a matriz parcial A_1 . Em \bar{A} , a entrada não diagonal especificada da coluna 1 é a_{61} . Analisamos, de seguida, a linha e a coluna 6 de A_1 . Dado que a linha e a coluna 6 de A_1 não têm mais de uma entrada não diagonal prescrita, riscamos a linha 6 de A_1 e chamamos A_6 à matriz parcial obtida. Sendo a_{36} a entrada não diagonal prescrita da coluna 6 de A_1 , analisamos a linha e a coluna 3 de A_6 . Não havendo mais de uma entrada não diagonal especificada em cada uma delas, riscamos a linha e a coluna 3 de A_6 e obtemos a matriz parcial A_3 . A entrada não diagonal prescrita da coluna 3 de A_6 é a_{53} , pelo que analisamos a linha e a coluna 5 de A_3 . Dado que tanto a linha como a coluna 5 de A_3 têm apenas uma entrada especificada, riscamos a linha e a coluna 5 de A_3 . Chamamos A_5 à matriz parcial obtida. Sendo a_{45} a entrada não diagonal especificada da coluna 5 de A_3 , analisamos a linha e a coluna 4 de A_5 . Não existem entradas não diagonais especificadas.

Terminamos, aqui, o procedimento, notando que percorremos todos os vértices de V .

A matriz de permutação $P = [e_4, e_5, e_3, e_6, e_1, e_2]$ é tal que

$$A' = P^T A P = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & ? & ? & ? & ? \\ a_{54} & a_{55} & a_{53} & ? & ? & ? \\ ? & a_{35} & a_{33} & a_{36} & ? & ? \\ ? & a_{65} & ? & a_{66} & a_{61} & ? \\ ? & ? & a_{13} & ? & a_{11} & ? \\ ? & ? & ? & a_{26} & ? & a_{22} \end{bmatrix},$$

sendo o digrafo associado



Note-se que, com efeito, o digrafo associado a A' satisfaz as condições *i* e *ii* da definição de digrafo CDUM.

Se um grafo dirigido $D = (V, E)$ não contém nenhum ciclo, ele induz um *conjunto parcialmente ordenado* (c.p.o.) (\mathcal{S}, \prec) tal que, para todos os vértices i e j , $i \prec j$ se e somente se existe um caminho de i até j no digrafo D . Não é difícil ver que os vértices de tal digrafo podem ser ordenados para obter uma sequência de vértices s_1, s_2, \dots, s_n onde $i < j$ se $s_i \prec s_j$. Essa sequência é uma ordenação topológica.

De notar que uma ordenação topológica não é única e que ela não é possível se o digrafo possuir ciclos.

Um exemplo comum de problemas de ordenação topológica é a confecção de dicionários, onde desejamos que uma palavra B cuja definição dependa da palavra A, apareça depois de A no dicionário.

Uma forma simples de realizar uma ordenação topológica é identificar um vértice i cujo grau de entrada seja zero, remover i da lista, actualizar os graus de entrada dos outros vértices e repetir o processo até percorrer todo o conjunto de vértices. Esta é a ideia do algoritmo que apresentamos de seguida e que será utilizado num problema de completamento de matrizes considerado mais à frente.

Sejam $D = (V, E)$ um digrafo acíclico com n vértices e (\mathcal{S}, \prec) o c.p.o. induzido por D . Por definição, um *elemento minimal* do c.p.o. (\mathcal{S}, \prec) é um elemento $m \in \mathcal{S}$ tal que $x \not\prec m$, para todo o $x \in \mathcal{S} - \{m\}$.

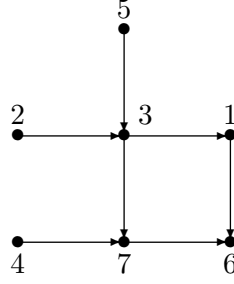
Em termos do diagrama de Hasse, um elemento minimal será um vértice que não tem nenhum vértice abaixo ligado a ele por uma aresta.

ALGORITMO: ORDENAÇÃO TOPOLÓGICA. Seja $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$. Para i de 1 até n , seja s_i um elemento minimal do c.p.o. $(\mathcal{S}_{i-1}, \prec)$, defina-se $\mathcal{S}_i := \mathcal{S}_{i-1} - \{s_i\}$ e

considere-se a restrição de \prec a este conjunto. Obtemos uma ordenação topológica s_1, s_2, \dots, s_n dos vértices de D .

Consideremos um exemplo de aplicação deste algoritmo de ordenação topológica.

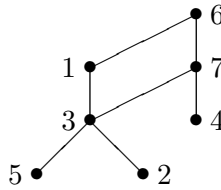
Exemplo 1.12. Consideremos o grafo dirigido D



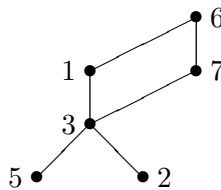
e uma matriz parcial A , não combinatorialmente simétrica, 7×7 , cujo digrafo associado é D . Note-se que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ? & ? & ? & ? & a_{16} & ? \\ ? & a_{22} & a_{23} & ? & ? & ? & ? \\ a_{31} & ? & a_{33} & ? & ? & ? & a_{37} \\ ? & ? & ? & a_{44} & ? & ? & a_{47} \\ ? & ? & a_{53} & ? & a_{55} & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & a_{66} & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & a_{76} & a_{77} \end{bmatrix}.$$

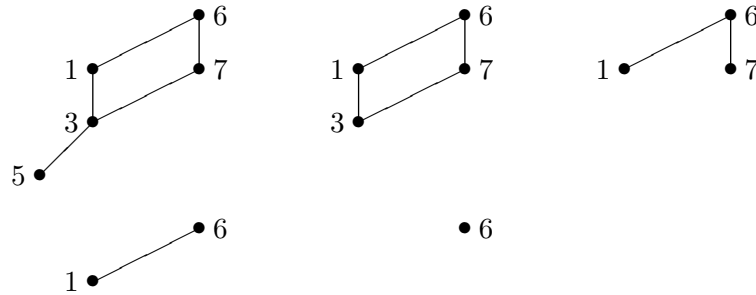
Consideremos, ainda, o c.p.o. induzido pelo grafo dirigido dado, (\mathcal{S}, \prec) , onde $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\prec = \{(1, 1), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 6), (3, 7), (4, 4), (4, 6), (4, 7), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (6, 6), (7, 6), (7, 7)\}$. O diagrama de Hasse de (\mathcal{S}, \prec) é



e $s_1 = 4$ é um elemento minimal de (\mathcal{S}, \prec) . Seja, então, $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} - s_1$ e consideremos a restrição de \prec a \mathcal{S}_1 . O diagrama de Hasse deste novo c.p.o. é



e $s_2 = 2$ é um elemento minimal deste último c.p.o.. Com o decorrer do algoritmo, obtemos os elementos minimais $s_3 = 5, s_4 = 3, s_5 = 7, s_6 = 1$ e $s_7 = 6$. Apresentamos, de seguida, os diagramas de Hasse relativos a cada um dos restantes c.p.o.'s obtidos nas várias iterações do processo.



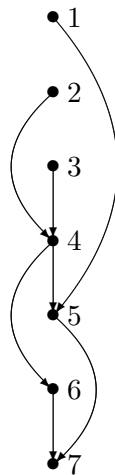
A sequência 4, 2, 5, 3, 7, 1, 6 é, então, uma ordenação topológica dos vértices de D .

Vejamos, agora, a importância da ordenação topológica para os problemas de completamento de matrizes.

Note-se que, se D é um grafo dirigido acíclico, o algoritmo de ordenação topológica atrás descrito permite-nos obter um digrafo D' , isomorfo a D , cujos vértices têm índice de subida nulo. De facto, basta-nos considerar o isomorfismo de digrafos $f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ definido por $f(s_i) = i$, para $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 1.13. Consideremos o digrafo D do exemplo anterior e a ordenação topológica 4, 2, 5, 3, 7, 1, 6 dos seu vértices. Seja D' o grafo dirigido obtido de D através do isomorfismo de digrafos f definido em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ por $f(4) = 1, f(2) = 2, f(5) = 3, f(3) = 4, f(7) = 5, f(1) = 6, f(6) = 7$.

Dispondo os vértices de D' de cima para baixo, na direcção vertical, de 1 até n , obtemos o diagrama



Facilmente se verifica, então, que o grau de subida de qualquer vértice de D' é, de facto, 0.

A renumeração dos vértices de D em D' , associada à ordenação topológica, pode ser traduzida a nível matricial por uma matriz de permutação. Se A é uma matriz parcial não combinatorialmente simétrica cujo digrafo associado é D , então existe uma matriz de permutação P , definida pela tal renumeração dos vértices, tal que o digrafo associado à matriz parcial $A' = P^T A P$ é D' . Assim, sendo o grau de subida de todo o vértice de D' igual a 0, as entradas especificadas de A' estão na diagonal principal e na parte triangular superior.

Exemplo 1.14. Consideremos, uma vez mais, o grafo dirigido D dos exemplos anteriores, a ordenação topológica 4, 2, 5, 3, 7, 1, 6 dos seus vértices e o digrafo D' , isomorfo a D , cujos vértices têm índice de subida nulo.

Consideremos, agora, a matriz de permutação associada à ordenação topológica 4, 2, 5, 3, 7, 1, 6, $P = [e_4, e_2, e_5, e_3, e_7, e_1, e_6]$. Note-se que a matriz parcial

$$A' = \begin{bmatrix} a_{44} & ? & ? & ? & a_{47} & ? & ? \\ ? & a_{22} & ? & a_{23} & ? & ? & ? \\ ? & ? & a_{55} & a_{53} & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & a_{33} & a_{37} & a_{31} & ? \\ ? & ? & ? & ? & a_{77} & ? & a_{76} \\ ? & ? & ? & ? & ? & a_{11} & a_{16} \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & a_{66} \end{bmatrix},$$

obtida através da transformação de semelhança $A' = P^T A P$, sendo A a matriz parcial referida no exemplo 1.12, tem as entradas prescritas na diagonal principal e na parte triangular superior.

Tendo em conta as últimas observações, podemos assumir, sem perda de generalidade, num problema de completamento de matrizes de uma classe invariante para as semelhanças de permutação, que uma matriz parcial não combinatorialmente simétrica cujo digrafo associado não contém ciclos tem todas as suas entradas especificadas na diagonal principal e na parte triangular superior.

1.3 Sobre algumas classes de matrizes

Apresentamos, de seguida, algumas classes de matrizes, suas propriedades e relações, que servem de base para os problemas de completamento que nos propomos analisar.

Uma característica comum a todas estas classes de matrizes é que qualquer submatriz principal é uma matriz do mesmo tipo que a matriz original, o que

nos permitirá, nos capítulos seguintes, traduzir de forma natural os diferentes conceitos para o contexto das matrizes parciais.

1.3.1 A classe das N_k -matrizes: algumas propriedades

Neste secção, k representa um inteiro positivo.

Uma matriz real A , $n \times n$, diz-se uma N_k -matriz se todos os seus menores principais de ordem não superior a k são negativos. Por outras palavras, A é uma N_k -matriz se $\det A[\alpha] < 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq k$.

Exemplo 1.15. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma N_k -matriz para qualquer k , uma vez que $\det A[\alpha] < 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, 2, 3\}$, enquanto que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma N_k -matriz apenas para $k \leq 2$, dado que $\det B[\beta] < 0$, para todo o $\beta \subseteq \{1, 2, 3\}$ tal que $|\beta| \leq 2$, e $\det B = 22$.

Em [43], J.J. Johnson denomina por *matrizes parcialmente negativas* as matrizes cujos menores principais são todos negativos. Nos modelos económicos, estas matrizes são chamadas N -matrizes. Esta classe aparece em variadas áreas como a teoria de funções univalentes ([32]), em análise multivariante ([65]) e em problemas de complementaridade linear ([64, 66]). Em [69], as N -matrizes surgem relacionadas com o algoritmo de Lemke na resolução de problemas de programação linear e quadrática convexa.

Sempre que $k \geq n$, os conceitos de N_k -matriz $n \times n$ e de N -matriz $n \times n$ coincidem.

Para iniciarmos o estudo do problema de completamento de N_k -matrizes, é obviamente importante, antes de mais, abordarmos propriedades gerais destas matrizes.

Podemos, claramente, afirmar que as entradas diagonais de uma N_k -matriz são negativas.

Uma propriedade bastante importante da classe das N_k -matrizes consiste no facto das submatrizes principais de uma N_k -matriz serem, também, N_k -matrizes.

Lema 1.1. *Toda a submatriz principal de uma N_k -matriz é uma N_k -matriz.*

Demonstração. Seja A uma N_k -matriz, $n \times n$. Consideremos uma sua submatriz principal B . É óbvio que toda a submatriz principal de B é uma submatriz principal de A . Logo, toda a submatriz principal de B de ordem não superior a k tem determinante negativo e B é uma N_k -matriz. \square

Os seguintes simples factos são também bastante úteis no estudo das N_k -matrizes.

Lema 1.2. *Todas as entradas de uma N_k -matriz são não nulas sempre que $k > 1$.*

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N_k -matriz, $n \times n$. Então, por definição, todas as suas submatrizes principais de ordem não superior a k têm determinante negativo. Em particular, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$, $\det A[\{i\}] < 0$, ou seja, $a_{ii} < 0$. Suponhamos que existe um elemento a_{ij} nulo, com $i \neq j$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $i < j$. Sendo A uma N_k -matriz e sendo $k \geq 2$, sabemos que $\det A[\{i, j\}] < 0$, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix} < 0.$$

No entanto, atendendo a que, como já referimos, $a_{ii}, a_{jj} < 0$ e a que $a_{ij} = 0$,

$$\det \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix} = a_{ii}a_{jj} > 0,$$

o que é absurdo.

Provámos, deste modo, que todas as entradas de A são não nulas. \square

Do lema anterior, podemos concluir que a soma directa de N_k -matrizes não é uma N_k -matriz se $k > 1$.

Sabemos, ainda, que o produto de N_k -matrizes não é, em geral, uma N_k -matriz.

O resultado que se segue diz respeito ao padrão de sinal de uma N_k -matriz.

Lema 1.3. *Para $k > 1$, toda a N_k -matriz é sinal-simétrica.*

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N_k -matriz, $n \times n$. Suponhamos que existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, tais que $a_{ij}a_{ji} < 0$. Então,

$$\det \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji} > 0,$$

ou seja, $\det A[\{i, j\}] > 0$, o que contradiz o facto de A ser uma N_k -matriz. Podemos, pois, afirmar que $a_{ij}a_{ji} > 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e, consequentemente, que A é sinal-simétrica. \square

Vejamos, de seguida, que a classe das N_k -matrizes é invariante para a multiplicação diagonal positiva.

Lema 1.4. *Se A é uma N_k -matriz $n \times n$ e D é uma matriz diagonal positiva, também $n \times n$, então DA , AD são N_k -matrizes.*

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N_k -matriz, $n \times n$, e $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ uma matriz diagonal positiva. Temos que $DA = (d_i a_{ij})$. Facilmente se verifica que, dado $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$, $(DA)[\alpha] = D[\alpha]A[\alpha]$. Assim, $\det(DA)[\alpha] = \det D[\alpha] \det A[\alpha]$, pelo que $\det(DA)[\alpha] < 0$ sempre que $|\alpha| \leq k$. Analogamente se verifica que $\det(AD)[\alpha] < 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq k$. Provámos, deste modo, que DA e AD são N_k -matrizes. \square

Dada uma N_k -matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $n \times n$, podemos obter, a partir de A , uma nova N_k -matriz com os elementos diagonais todos iguais a -1 . Com efeito, considerando a matriz diagonal positiva $D = \text{diag}(-a_{11}^{-1}, \dots, -a_{nn}^{-1})$, a matriz DA é uma N_k -matriz com todos os elementos diagonais iguais a -1 .

Observação. Se $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma N_k -matriz e D é uma matriz diagonal com um elemento diagonal não positivo d_i na posição (i, i) , então as entradas de DA e AD na posição (i, i) são, respectivamente, $d_i a_{ii}$ e $a_{ii} d_i$. Logo, DA e AD têm, pelo menos, um elemento da diagonal principal não negativo, donde DA e AD não são N_k -matrizes.

Como o seguinte resultado comprova, a classe das N_k -matrizes é invariante para a semelhança diagonal.

Lema 1.5. *Dadas uma N_k -matriz A e uma matriz diagonal não singular D , ambas $n \times n$, DAD^{-1} é uma N_k -matriz.*

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ e $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, com d_1, \dots, d_n não nulos. Note-se que $DAD^{-1} = (d_i a_{ij} d_j^{-1})$. Facilmente se verifica que $(DAD^{-1})[\alpha] = D[\alpha]A[\alpha]D^{-1}[\alpha]$, para qualquer subconjunto α de $\{1, \dots, n\}$. Portanto, $\det(DAD^{-1})[\alpha] = \det A[\alpha] < 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq k$. Podemos, pois, afirmar que DAD^{-1} é uma N_k -matriz. \square

O resultado que se segue ilustra o modo de obter, a partir de uma N_k -matriz A , uma N_k -matriz B com todas as entradas da diagonal superior iguais a 1 semelhante a A por semelhança diagonal.

Corolário 1.1. Para $k > 1$, toda a N_k -matriz $n \times n$, $n \geq 2$, é diagonalmente semelhante a uma N_k -matriz com as entradas da diagonal superior iguais a 1.

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N_k -matriz, $n \times n$, $n \geq 2$. Sejam $d_2 = a_{12}, d_3 = a_{12}a_{23}, \dots, d_n = a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n}$. Consideremos a matriz diagonal $D = \text{diag}(1, d_2, d_3, \dots, d_n)$. Dado que a condição $k > 1$ exclui a existência de entradas nulas em A , D é uma matriz diagonal regular. Atendendo ao lema anterior, podemos, então, afirmar que DAD^{-1} é uma N_k -matriz.

O elemento na posição $(1, 2)$ da matriz DAD^{-1} é $a_{12}d_2^{-1}$ e, para cada i em $\{2, \dots, n-1\}$, o elemento na posição $(i, i+1)$ é $d_i a_{ii+1} d_{i+1}^{-1}$. Portanto, todos os elementos nas posições $(i, i+1)$ de DAD^{-1} são iguais a 1. \square

A classe das N_k -matrizes é, ainda, invariante para as semelhanças de permutação, como mostra o seguinte lema.

Lema 1.6. Se A é uma N_k -matriz e P é uma matriz de permutação, então PAP^T é uma N_k -matriz.

Demonstração. Sejam A uma N_k -matriz, $n \times n$, e P_{ij} a matriz de permutação elementar resultante da matriz I_n por troca das suas linhas i e j . Sabemos que a matriz $P_{ij}A$ é obtida de A trocando as linhas i e j e que a matriz AP_{ij} resulta de A por troca das colunas i e j . Seja α um subconjunto de $\{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq k$. Se $i, j \notin \alpha$, então $(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha] = A[\alpha]$, donde $\det(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha] < 0$. Se $i \in \alpha$ e $j \notin \alpha$, temos que $(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha]$ é igual à matriz $A[(\alpha - \{i\}) \cup \{j\}]$ ou é resultante desta matriz por troca de algumas linhas e respectivas colunas, pelo que $\det(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha] = \det A[(\alpha - \{i\}) \cup \{j\}] < 0$. Se $i \notin \alpha$ e $j \in \alpha$, segue-se que $(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha]$ é igual à matriz $A[(\alpha - \{j\}) \cup \{i\}]$ ou é obtida desta matriz por troca de algumas linhas e respectivas colunas. Por conseguinte, $\det(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha] = \det A[(\alpha - \{j\}) \cup \{i\}] < 0$. Se $i, j \in \alpha$, então $(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha]$ obtém-se de $A[\alpha]$ por troca de algumas linhas e respectivas colunas, pelo que $\det(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha] = \det A[\alpha] < 0$. Assim, $\det(P_{ij}AP_{ij}^T)[\alpha] < 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq k$, e, portanto, podemos concluir que $P_{ij}AP_{ij}^T$ é uma N_k -matriz.

Dada uma matriz de permutação P , sabemos que P se escreve como um produto de matrizes de permutação elementares. Facilmente se verifica, então, que PAP^T é uma N_k -matriz. \square

Estudaremos, de seguida, uma propriedade respeitante ao sinal das entradas de determinadas N_k -matrizes.

Consideremos, para tal, a função $\text{sign} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \{-1, 1\}$ definida por

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} -1 & \text{se } a < 0 \\ 1 & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

e o seguinte conjunto de matrizes $n \times n$

$$\mathcal{S}_n = \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \mid a_{ij} \neq 0 \text{ e } \text{sign}(a_{ij}) = (-1)^{i+j+1}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

O resultado que se segue permite-nos identificar, a menos de semelhanças diagonais, o padrão de sinal das N_k -matrizes, para $k \geq 3$.

Lema 1.7. *Toda a N_k -matriz $n \times n$, com $n \geq 2$ e $k \geq 3$, cuja diagonal superior tem os elementos todos positivos pertence a \mathcal{S}_n .*

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N_k -matriz $n \times n$ tal que $\text{sign}(a_{ii+1}) = 1$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Vimos já que $\text{sign}(a_{ii}) = -1 = (-1)^{i+i+1}$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, e, por hipótese, $\text{sign}(a_{ii+1}) = (-1)^{i+(i+1)+1}$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Sabemos, também, que $\text{sign}(a_{ij}) = \text{sign}(a_{ji})$ e $a_{ij} \neq 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Sejam $i \in \{1, \dots, n-2\}$ e $j \in \{i+2, \dots, n\}$. Consideremos a submatriz principal $A[\{i, i+1, j\}]$. Temos que

$$\begin{aligned} \det A[\{i, i+1, j\}] &= a_{jj}(a_{ii}a_{i+1i+1} - a_{ii+1}a_{i+1i}) + (-a_{ii}a_{i+1j}a_{ji+1}) \\ &\quad + (-a_{i+1i+1}a_{ij}a_{ji}) + a_{i+1i}a_{ji+1}a_{ij} + a_{ii+1}a_{i+1j}a_{ji}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$a_{jj}(a_{ii}a_{i+1i+1} - a_{ii+1}a_{i+1i}) > 0,$$

$$-a_{ii}a_{i+1j}a_{ji+1} > 0$$

e

$$-a_{i+1i+1}a_{ij}a_{ji} > 0.$$

Portanto, sendo $\det A[\{i, i+1, j\}] < 0$ e $a_{i+1i}, a_{ii+1} > 0$, podemos concluir que $a_{ji+1}a_{ij} < 0$ e $a_{i+1j}a_{ji} < 0$. Assim, $\text{sign}(a_{ij}) = -\text{sign}(a_{i+1j})$.

Logo, $\text{sign}(a_{ii+2}) = -\text{sign}(a_{i+1i+2}) = -1 = (-1)^{i+(i+2)+1}$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-2\}$.

Para $i \in \{1, \dots, n-3\}$, $\text{sign}(a_{ii+3}) = -\text{sign}(a_{i+1i+3}) = 1 = (-1)^{i+(i+3)+1}$.

Aplicando sucessivamente este raciocínio, prova-se que $\text{sign}(a_{ij}) = (-1)^{i+j+1}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$. Atendendo a que, para $k > 1$, toda a N_k -matriz é sinal-simétrica, podemos, então, afirmar que $A \in \mathcal{S}_n$. \square

Observação. Atendendo ao Corolário 1.1 e ao Lema 1.7, concluímos que toda a N_k -matriz $n \times n$, com $n \geq 2$ e $k \geq 3$, é diagonalmente semelhante a uma N_k -matriz em \mathcal{S}_n . Consequentemente, toda a N -matriz $n \times n$ é diagonalmente

semelhante a uma N -matriz pertencente a \mathcal{S}_n . Assim, a menos de semelhança diagonal, o padrão de sinal para estas classes de matrizes será

$$\begin{bmatrix} - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Dentro da classe das N -matrizes, consideremos as N -matrizes simétricas. Naturalmente, uma N -matriz simétrica A é uma N -matriz tal que $A = A^T$.

Note-se que todas as submatrizes principais de uma N -matriz simétrica são, ainda, N -matrizes simétricas.

Vejamos que esta subclasse das N -matrizes não é invariante para a semelhança diagonal. Para tal, consideremos a N -matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & 4 \\ -8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

e a matriz diagonal $D = \text{diag}(1, 2, 3)$. A matriz $B = DAD^{-1}$ não é uma N -matriz simétrica. De facto, através desta semelhança diagonal, a simetria não é preservada.

Há, no entanto, um caso particular de semelhanças diagonais para as quais a simetria é invariante. Referimo-nos a esse tipo de semelhanças diagonais como semelhanças diagonais admissíveis.

Lema 1.8. *Sejam A uma N -matriz simétrica $n \times n$ e $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ uma matriz diagonal não singular. Então, DAD^{-1} é uma N -matriz simétrica se e só se $d_1^2 = d_2^2 = \dots = d_n^2$.*

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N -matriz simétrica. Consideremos uma matriz diagonal invertível $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Sabemos, então, que $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer i e j . Temos que $DAD^{-1} = (d_i a_{ij} d_j^{-1})_{i,j=1}^n$. Vimos já, no Lema 1.5, que DAD^{-1} é uma N -matriz. Vejamos quais as condições necessárias e suficientes sobre as entradas de D para que tal matriz seja, ainda, simétrica. Dados i, j tais que $i \neq j$, $(DAD^{-1})_{ij} = (DAD^{-1})_{ji}$ se e só se $d_i a_{ij} d_j^{-1} = d_j a_{ji} d_i^{-1}$, isto é, se e somente se $d_i^2 = d_j^2$. Logo, DAD^{-1} é uma N -matriz simétrica se e só se $d_1^2 = d_2^2 = \dots = d_n^2$. \square

Facilmente se comprova que a classe das N -matrizes simétricas não é invariante para a multiplicação diagonal positiva à esquerda ou à direita, uma vez que a simetria nem sempre é preservada.

O resultado que se segue diz respeito à congruência diagonal.

Lema 1.9. *Sejam $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N -matriz simétrica e D uma matriz diagonal regular $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Então, DAD é uma N -matriz simétrica.*

Demonstração. Temos que $DAD = (d_i a_{ij} d_j)_{i,j=1}^n$. Logo, $(DAD)^T = DAD$. Além disso, dado $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\det(DAD)[\alpha] = (\det D[\alpha])^2 \det A[\alpha]$, pelo que $\det(DAD)[\alpha] < 0$. Portanto, DAD é, de facto, uma N -matriz simétrica. \square

Observação. Dada uma N -matriz simétrica $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, consideremos a matriz diagonal $D = \text{diag}(|a_{11}|^{1/2}, |a_{22}|^{1/2}, \dots, |a_{nn}|^{1/2})$. Facilmente se verifica que os elementos da diagonal principal de DAD são todos iguais a -1 .

Lema 1.10. *Toda a N -matriz simétrica $n \times n$, $n \geq 2$, é diagonalmente semelhante a uma N -matriz simétrica cujos elementos da diagonal superior são positivos.*

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ uma N -matriz simétrica e D a matriz diagonal $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$, onde $d_1 = 1$ e $d_{i+1} = d_i \text{sign}(a_{ii+1})$, $i = 1, \dots, n-1$. Note-se que $d_i^2 = 1$ para todo o i , pelo que D é uma matriz de semelhança diagonal admissível. Logo, DAD^{-1} é uma N -matriz parcial simétrica, pelo Lema 1.8. Além disso, o elemento na posição $(i, i+1)$ de DAD^{-1} é $\text{sign}(a_{ii+1})a_{ii+1} > 0$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$. \square

Do lema anterior e do Lema 1.7, obtemos o resultado que se segue.

Corolário 1.2. *Toda a N -matriz simétrica $n \times n$ é diagonalmente semelhante a uma N -matriz simétrica pertencente a \mathcal{S}_n .*

Facilmente se verifica, ainda, que a classe das N -matrizes simétricas é invariante para as semelhanças de permutação.

Motivados pela caracterização das matrizes definidas positivas através dos menores principais descendentes, derivaremos uma caracterização, bastante simples e útil, das N -matrizes simétricas, também a partir desses menores principais. O resultado que se segue, conhecido como o *teorema de entrelaçamento de valores próprios para matrizes com fronteira* (ver [30]), serve de base para os resultados que nos levam a essa tal caracterização.

Teorema 1.1. *Sejam B uma matriz hermitica $n \times n$ (sobre o corpo \mathbb{C}), y um n -vector complexo e b um número real. Seja \bar{B} a matriz hermitica $(n+1) \times (n+1)$ obtida de B com y e b como fronteiras do seguinte modo:*

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{c|c} B & y \\ \hline y^* & b \end{array} \right].$$

Denotemos os valores próprios de B e de \bar{B} por $\{\lambda_i\}$ e $\{\bar{\lambda}_i\}$, respectivamente, com $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ e $\bar{\lambda}_1 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_n \leq \bar{\lambda}_{n+1}$. Então,

$$\bar{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \bar{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \bar{\lambda}_{n+1}.$$

Apresentamos, agora, alguns resultados respeitantes a matrizes hermiticas com todos os menores principais descendentes negativos e que serão bastante úteis para obter a caracterização mencionada.

Lema 1.11. *Seja A uma matriz hermitica $n \times n$ cujos menores principais descendentes são negativos. Então, cada submatriz principal $A[\{1, \dots, i\}]$, $i = 1, \dots, n$, tem um valor próprio negativo e, para $i > 1$, os restantes valores próprios são positivos.*

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ e sejam $\lambda_{i1} \leq \dots \leq \lambda_{ii}$ os valores próprios da submatriz principal $A[\{1, \dots, i\}]$, $i = 1, \dots, n$. Note-se que $\lambda_{11} = \det A[\{1\}] < 0$. Aplicando o Teorema 1.1 a

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{12} & a_{22} \end{array} \right],$$

podemos concluir que

$$\lambda_{21} \leq \lambda_{11} \leq \lambda_{22}.$$

Logo, $\lambda_{21} < 0$ e, sendo $\det A[\{1, 2\}] = \lambda_{21}\lambda_{22} < 0$, segue-se que $\lambda_{22} > 0$.

Para $i \leq n$ assumamos que $\lambda_{i-11} < 0$ e $\lambda_{i-1,2}, \dots, \lambda_{i-1,i-1} > 0$. Observe-se que

$$A[\{1, \dots, i\}] = \left[\begin{array}{c|c} A[\{1, \dots, i-1\}] & A[\{1, \dots, i-1\}|\{i\}] \\ \hline A[\{i\}|\{1, \dots, i-1\}] & a_{ii} \end{array} \right].$$

Uma vez mais pelo Teorema 1.1, temos que

$$\lambda_{i1} \leq \lambda_{i-11} \leq \lambda_{i2} \leq \lambda_{i-12} \leq \dots \leq \lambda_{ii-1} \leq \lambda_{i-1,i-1} \leq \lambda_{ii}.$$

Por hipótese, $\lambda_{i-11} < 0$ e $\lambda_{i-12} > 0$. Logo, $\lambda_{i1} < 0$ e $\lambda_{i3}, \dots, \lambda_{ii} > 0$. Mais ainda, dado que $\det A[\{1, \dots, i\}] = \lambda_{i1} \dots \lambda_{ii} < 0$, $\lambda_{i2} > 0$. Portanto, $A[\{1, \dots, i\}]$ tem um valor próprio negativo e todos os restantes valores próprios são positivos, como pretendíamos provar. \square

Proposição 1.1. *Seja A uma matriz hermitica $n \times n$ com todos os menores principais descendentes negativos e com todos os elementos da diagonal principal negativos. Então, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$, a submatriz principal $A[\alpha]$ de A tem um valor próprio negativo, sendo os restantes positivos quando $|\alpha| > 1$.*

Demonstração. A demonstração segue por indução em n . Para $n < 3$, o resultado é trivial. Consideremos $n \geq 3$ e admitamos que o resultado é válido para $n - 1$.

Denotemos por $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ os valores próprios de $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$.

Dado um subconjunto α de $\{1, \dots, n\}$, denotamos por $\lambda_{\alpha 1} \leq \dots \leq \lambda_{\alpha|\alpha|}$ os valores próprios da submatriz principal $A[\alpha]$.

Seja $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$. Consideramos os seguintes três casos:

(a) $\alpha \subseteq \{1, \dots, n - 1\}$

Observe-se que $A[\{1, \dots, n - 1\}]$ é uma matriz hermitica $(n - 1) \times (n - 1)$, cujos menores principais descendentes são negativos e cujos elementos da diagonal principal são todos negativos. Pela hipótese de indução, sabemos que todas as submatrizes principais têm um só valor próprio negativo, sendo os restantes, caso existam, positivos. Em particular, $(A[\{1, \dots, n - 1\}])[\alpha] = A[\alpha]$ tem um valor próprio negativo e os restantes, quando $|\alpha| > 1$, são positivos.

(b) $\alpha \subseteq \{2, \dots, n\}$

Sabemos, atendendo ao caso anterior, que a submatriz principal $A[\{2, \dots, k\}]$ de A tem um só valor próprio negativo e os restantes, se $k > 2$, são positivos, para $2 \leq k \leq n - 1$. Consideremos a submatriz principal $A[\{2, \dots, n\}]$ de A . Obviamente, A é semelhante a

$$B = \left[\begin{array}{c|c} A[\{2, \dots, n\}] & A[\{2, \dots, n\}|\{1\}] \\ \hline A[\{1\}|\{2, \dots, n\}] & a_{11} \end{array} \right],$$

pelo que o espectro de B é exactamente o mesmo que o de A . Aplicando o Teorema 1.1, concluímos que

$$\lambda_1 \leq \lambda_{\{2, \dots, n\}1} \leq \lambda_2 \leq \lambda_{\{2, \dots, n\}2} \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_{\{2, \dots, n\}n-1} \leq \lambda_n.$$

Atendendo ao Lema 1.11, segue-se que $\lambda_{\{2, \dots, n\}2}, \dots, \lambda_{\{2, \dots, n\}n-1} > 0$. Aplicando uma vez mais o Teorema 1.1 a

$$A[\{2, \dots, n\}] = \left[\begin{array}{c|c} A[\{2, \dots, n-1\}] & A[\{2, \dots, n-1\}|\{n\}] \\ \hline A[\{n\}|\{2, \dots, n-1\}] & a_{nn} \end{array} \right],$$

podemos inferir que

$$\lambda_{\{2, \dots, n\}1} \leq \lambda_{\{2, \dots, n-1\}1},$$

o que implica, tendo em conta o caso (a), que $\lambda_{\{2, \dots, n\}1} < 0$. Acabámos, assim, de provar que $A[\{2, \dots, n\}]$ é uma matriz hermitica $(n-1) \times (n-1)$ cujos menores principais descendentes são negativos e cujas entradas da diagonal principal são, também, negativas. Pela hipótese de indução, segue-se que todas as suas submatrizes principais têm um valor próprio negativo, sendo os restantes positivos. Por conseguinte $A[\alpha]$ tem um só valor próprio negativo e todos os outros, se $|\alpha| > 1$, são positivos.

(c) $1, n \in \alpha$

Se $|\alpha| = n$, então $A[\alpha] = A$ e a validade do resultado é dada pelo Lema 1.11.

Atendamos, agora, ao caso em que $|\alpha| = n-1$. Neste caso, $\alpha = \{i\}'$, para algum $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Note-se que A é semelhante por permutação a

$$\left[\begin{array}{c|c} A[\alpha] & A[\alpha|\{i\}] \\ \hline A[\{i\}|\alpha] & a_{ii} \end{array} \right],$$

pelo que os valores próprios desta matriz são $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Pelo Teorema 1.1, segue-se que

$$\lambda_1 \leq \lambda_{\alpha 1} \leq \lambda_2 \leq \lambda_{\alpha 2} \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_{\alpha n-1} \leq \lambda_n.$$

Do Lema 1.11, sabemos, então, que $\lambda_{\alpha 2}, \dots, \lambda_{\alpha n-1} > 0$. Aplicando uma vez mais o Teorema 1.1 a

$$A[\alpha] = \left[\begin{array}{c|c} A[\alpha - \{n\}] & A[\alpha - \{n\}|\{n\}] \\ \hline A[\{n\}|\alpha - \{n\}] & a_{nn} \end{array} \right],$$

temos que

$$\lambda_{\alpha 1} \leq \lambda_{\alpha - \{n\} 1}.$$

Vimos já, no caso (a), que $\lambda_{\alpha - \{n\} 1} < 0$. Assim, $\lambda_{\alpha 1} < 0$. Portanto, o resultado é válido quando $|\alpha| = n-1$.

Analizamos, de seguida, o caso em que $|\alpha| = k$, com $2 \leq k \leq n-2$. Assumamos que, para todo o $\beta \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $1, n \in \beta$ e $|\beta| = k+1$, $A[\beta]$ tem um só valor próprio negativo, sendo os restantes positivos.

Dado $j \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que $j \notin \alpha$, é óbvio que a submatriz principal $A[\alpha \cup \{j\}]$ é semelhante por permutação a

$$\left[\begin{array}{c|c} A[\alpha] & A[\alpha|\{j\}] \\ \hline A[\{j\}|\alpha] & a_{jj} \end{array} \right].$$

Atendendo ao Teorema 1.1, segue-se que

$$\lambda_{\alpha \cup \{j\} 1} \leq \lambda_{\alpha 1} \leq \lambda_{\alpha \cup \{j\} 2} \leq \lambda_{\alpha 2} \leq \dots \leq \lambda_{\alpha \cup \{j\} k} \leq \lambda_{\alpha k} \leq \lambda_{\alpha \cup \{j\} k+1}.$$

Tendo em conta que $|\alpha \cup \{j\}| = k + 1$ e que $1, n \in \alpha \cup \{j\}$, temos, por hipótese, que $\lambda_{\alpha \cup \{j\}2} > 0$ e, por conseguinte, $\lambda_{\alpha 2}, \dots, \lambda_{\alpha k} > 0$.

Finalmente, observe-se que

$$A[\alpha] = \left[\begin{array}{c|c} A[\alpha - \{n\}] & A[\alpha - \{n\}|\{n\}] \\ \hline A[\{n\}|\alpha - \{n\}] & a_{nn} \end{array} \right].$$

Aplicando o Teorema 1.1, podemos afirmar que

$$\lambda_{\alpha 1} \leq \lambda_{\alpha - \{n\}1}.$$

Como $\alpha - \{n\} \subseteq \{1, \dots, n - 1\}$, sabemos, pelo caso (a), que $\lambda_{\alpha - \{n\}1} < 0$ e, portanto, $\lambda_{\alpha 1} < 0$, como pretendíamos mostrar. \square

Atendendo aos resultados anteriores, temos, então, a seguinte caracterização das N -matrizes simétricas.

Teorema 1.2. *Seja A uma matriz simétrica com entradas diagonais negativas. Então, A é uma N -matriz simétrica se e somente se os seus menores principais descendentes são negativos.*

Demonstração. É óbvio que os menores principais descendentes de uma N -matriz são negativos. Reciprocamente, admitamos que todos os menores principais descendentes de A são negativos. Pela Proposição 1.1, toda a submatriz principal de A tem um valor próprio negativo, sendo os restantes valores próprios positivos quando a ordem da submatriz é superior a 1. Assim, o determinante de cada submatriz principal de A é negativo e, consequentemente, A é uma N -matriz simétrica. \square

Observação. Para provar que uma dada matriz simétrica $n \times n$ é uma N -matriz, bastará, então, calcular $2n - 1$ determinantes (os relativos às submatrizes principais 1×1 e os menores principais descendentes), em vez dos $2^n - 1$ referentes a todas as submatrizes principais.

1.3.2 A classe das TNP -matrizes: algumas notas

Uma matriz real A , $n \times m$, diz-se uma *matriz totalmente não positiva* (abreviadamente, TNP -matriz) se todos os seus menores são não positivos.

Assim, A é uma TNP -matriz se $\det A[\alpha|\beta] \leq 0$, para quaisquer $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ e $\beta \subseteq \{1, \dots, m\}$ tais que $|\alpha| = |\beta|$.

Um caso particular das TNP -matrizes são as *matrizes totalmente negativas* (abreviadamente, TN -matrizes), cujos menores são todos negativos. Esta subclasse de matrizes é estudada em [14] e em [16].

Exemplo 1.16. As seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -8 \\ -3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -9 \\ -3 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

são totalmente não positiva e totalmente negativa, respectivamente. A matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -3 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

não é nem totalmente não positiva nem totalmente negativa, uma vez que $\det C[\{1, 2\}|\{2, 3\}] > 0$.

Note-se que todas as entradas de uma *TNP*-matriz são não positivas.

Apesar de na literatura encontrarmos a definição destas classes de matrizes para matrizes retangulares, consideraremos, apenas, matrizes quadradas. Neste caso, facilmente se comprova que toda a *TN*-matriz é uma *N*-matriz.

Analizamos, de seguida, propriedades da classe das matrizes totalmente não positivas com relevância para este nosso estudo.

Começamos por notar que a não positividade total é herdada por qualquer submatriz quadrada de uma *TNP*-matriz. Com efeito, dada uma *TNP*-matriz A , qualquer submatriz quadrada de uma submatriz de A é, obviamente, uma submatriz de A . Logo, tem determinante não positivo.

Atendamos, agora, a transformações de semelhança para as quais esta classe de matrizes é invariante.

Lema 1.12. *Seja A uma *TNP*-matriz $n \times n$. Dada uma matriz diagonal positiva D $n \times n$, também DA e AD são *TNP*-matrizes.*

Demonstração. Sejam $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ e $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Sabemos que $DA = (d_i a_{ij})_{i,j=1}^n$ e $AD = (a_{ij} d_j)_{i,j=1}^n$. Sendo A uma *TNP*-matriz e $\alpha, \beta \subseteq \{1, \dots, n\}$ tais que $|\alpha| = |\beta|$, $\det A[\alpha|\beta] \leq 0$.

Mostremos, primeiro, que também $\det(DA)[\alpha|\beta] \leq 0$. Claramente, existem um natural s e $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_s\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_s\}$. Facilmente se verifica que

$$(DA)[\alpha|\beta] = \begin{bmatrix} d_{i_1} a_{i_1 j_1} & d_{i_1} a_{i_1 j_2} & \dots & d_{i_1} a_{i_1 j_s} \\ d_{i_2} a_{i_2 j_1} & d_{i_2} a_{i_2 j_2} & \dots & d_{i_2} a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{i_s} a_{i_s j_1} & d_{i_s} a_{i_s j_2} & \dots & d_{i_s} a_{i_s j_s} \end{bmatrix}.$$

Logo, $\det(DA)[\alpha|\beta] = d_{i_1}d_{i_2}\dots d_{i_s}\det A[\alpha|\beta]$. Atendendo a que D tem os elementos diagonais positivos, $\det(DA)[\alpha|\beta]$ e $\det A[\alpha|\beta]$ têm o mesmo sinal. Podemos, portanto, afirmar que DA é uma TNP -matriz. De forma análoga, prova-se que também AD é uma TNP -matriz. \square

Corolário 1.3. *Se A é uma TNP -matriz quadrada e D é uma matriz diagonal positiva, então DAD^{-1} é uma TNP -matriz.*

Demonstração. Basta notar que também os elementos diagonais de D^{-1} são positivos. \square

O resultado anterior tem especial importância para o problema de completamente que nos propomos tratar. Podemos, no entanto, pensar noutros tipos de semelhanças diagonais que preservam esta classe de matrizes, tal como o lema que se segue ilustra.

Lema 1.13. *Seja A uma TNP -matriz $n \times n$. Dada uma matriz diagonal negativa D $n \times n$, também DAD^{-1} é uma TNP -matriz.*

Demonstração. Se $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ e $D = \text{diag}(-d_1, \dots, -d_n)$, com $d_i > 0$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$, então $DAD^{-1} = (d_i a_{ij} d_j^{-1})_{i,j=1}^n$. Sejam $\alpha, \beta \subseteq \{1, \dots, n\}$ tais que $|\alpha| = |\beta|$. Existem, então, um natural s e $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_s\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_s\}$. Assim,

$$\det(DAD^{-1})[\alpha|\beta] = d_{i_1} \dots d_{i_s} \det A[\alpha|\beta] d_{j_1}^{-1} \dots d_{j_s}^{-1}.$$

Por conseguinte, $\det(DAD^{-1})[\alpha|\beta]$ e $\det A[\alpha|\beta]$ têm o mesmo sinal. Podemos, portanto, afirmar que DAD^{-1} é uma TNP -matriz. \square

Observação. Se os elementos diagonais de uma matriz $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, regular, não são nem todos positivos nem todos negativos e se $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma TN -matriz, a matriz DAD^{-1} não é uma TN -matriz. Com efeito, se $d_i > 0$ e $d_j < 0$, então $\det(DAD^{-1})[\{i\}|\{j\}] = d_i a_{ij} d_j^{-1} > 0$. Consequentemente, se A é uma TNP -matriz e D é uma matriz diagonal com elementos de sinais contrários, DAD^{-1} não é, em geral, uma TNP -matriz.

O exemplo que se segue mostra que a classe das TN -matrizes e, consequentemente, a classe das TNP -matrizes não são invariantes para a multiplicação, ao contrário do que ocorre para as classes das matrizes cujos menores são todos positivos ou todos não negativos.

Exemplo 1.17. Consideremos a TN -matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

não é uma TN -matriz.

Facilmente se verifica, também, que a soma directa de matrizes totalmente não positivas não é, em geral, uma matriz totalmente não positiva. Com efeito, dadas duas matrizes A e B , quadradas, totalmente não positivas, a matriz

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

é totalmente não positiva se e somente se $A = 0$ ou $B = 0$.

Analisemos, agora, as semelhanças de permutação. Em geral, se P é uma matriz de permutação e A é uma TN -matriz, PAP^T não é uma TN -matriz. Atendamos ao seguinte exemplo.

Exemplo 1.18. Consideremos a TN -matriz

$$A = \begin{bmatrix} -20 & -16 & -4 \\ -16 & -12,2 & -2,8 \\ -4 & -2,8 & -0,2 \end{bmatrix}$$

e a matriz de permutação

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que $\det(PAP^T) [\{2,3\}|\{1,3\}] = 4$, PAP^T não é uma TN -matriz. Como A é, também, uma TNP -matriz, comprovamos, deste modo, que a classe destas matrizes tão-pouco é invariante para as semelhanças de permutação.

Há, no entanto, um tipo de semelhança de permutação que preserva as TNP -matrizes, como veremos de seguida. Seja P_k a matriz $k \times k$

$$P_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos, agora, uma TNP -matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $n \times n$. Seja $B = P_n A P_n^T$. Se $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, facilmente se verifica que $b_{ij} = a_{n-i+1, n-j+1}$, para quaisquer

$i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dados dois subconjuntos $\alpha = \{i_1, \dots, i_s\}, \beta = \{j_1, \dots, j_s\}$ de $\{1, \dots, n\}$, temos que

$$(P_n A P_n^T) [\alpha | \beta] = P_s A [\{n - i_s + 1, \dots, n - i_1 + 1\} | \{n - j_s + 1, \dots, n - j_1 + 1\}] P_s^T,$$

pelo que

$$\det(P_n A P_n^T) [\alpha | \beta] = \det A [\{n - i_s + 1, \dots, n - i_1 + 1\} | \{n - j_s + 1, \dots, n - j_1 + 1\}]$$

e, por conseguinte, $P_n A P_n^T$ é, também, uma TNP -matriz.

1.3.3 Classes de matrizes com menores principais positivos

Ao longo desta secção, k denota um número inteiro positivo.

Uma matriz real quadrada diz-se uma P -matriz se todos os seus menores principais são positivos.

Esta classe de matrizes generaliza uma série de outras classes bastante importantes, como as matrizes definidas positivas, no campo das matrizes não simétricas, as M -matrizes, as M -matrizes inversas, as matrizes de Fisher e as matrizes de Kotljanskii, todas discutidas em [31]. Como denominador comum temos, então, menores principais positivos.

Podemos encontrar, na literatura, aplicações bastante interessantes das P -matrizes na análise de alguns modelos económicos e em Teoria de Jogos (ver, por exemplo, [1]). Em [3], encontramos, ainda, aplicações desta classe de matrizes aos chamados *problemas de complementaridade linear*.

Exemplo 1.19. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -10 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma P -matriz, uma vez que $\det A [\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, enquanto que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -10 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é uma P -matriz, dado que $\det B [\{1, 2, 4\}] = -13$.

Apresentamos, de seguida, algumas caracterizações das P -matrizes.

Proposição 1.2. *As seguintes condições são equivalentes para uma matriz A de ordem n sobre \mathbb{R} :*

P1. Todos os menores principais de A são positivos, ou seja, A é uma P -matriz.

P2. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, x e Ax são sinal-relacionados, isto é, existe pelo menos uma entrada do produto de Hadamard $x \circ (Ax)$ positiva.

P3. Todo o valor próprio real de toda a submatriz principal de A é positivo.

De entre as propriedades conhecidas da classe das P -matrizes, destacamos as que se seguem.

Proposição 1.3. *Seja A uma P -matriz de ordem n . São válidas as seguintes afirmações:*

- i. A^T é uma P -matriz.*
- ii. A^{-1} é uma P -matriz.*
- iii. Se P é uma matriz de permutação $n \times n$, então PAP^T é uma P -matriz.*
- iv. Dada uma matriz diagonal positiva $n \times n$ D , DA e AD são P -matrizes.*
- v. Se D é uma matriz diagonal de ordem n , não singular, então DAD^{-1} é uma P -matriz.*
- vi. Toda a submatriz principal de A é uma P -matriz.*

Facilmente se comprova que a soma e o produto de P -matrizes não são, em geral, P -matrizes.

Podemos pensar, naturalmente, numa generalização desta classe de matrizes: uma P_k -matriz é uma matriz cujas submatrizes principais de ordem não superior a k têm determinante positivo. Se A é uma P_k -matriz $n \times n$ com $n \leq k$, A é, obviamente, uma P -matriz.

Exemplo 1.20. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1,5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma P_k -matriz para $k = 1, 2, 3$, uma vez que $\det A[\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subset \{1, 2, 3, 4\}$. No entanto, A não é uma P_4 -matriz (e consequentemente, A não é uma P -matriz, dado que $\det A = -1$.)

Facilmente se verifica que toda a submatriz principal de uma P_k -matriz é, ainda, uma P_k -matriz. Seguindo uma metodologia análoga à apresentada para as P -matrizes, podemos questionar-nos sobre as invariâncias da classe das P_k -matrizes relativamente a transformações de semelhança e à multiplicação diagonal positiva. Podemos, nesse sentido, verificar, muito facilmente, que a classe das P_k -matrizes é invariante para as semelhanças de permutação e diagonais, bem como para a multiplicação diagonal positiva.

Na Biologia, na Física e nas Ciências Sociais, muitos problemas podem ser reduzidos a problemas relativos a matrizes com estruturas especiais. Uma das estruturas mais habituais corresponde a matrizes com entradas não diagonais não positivas. O conjunto das matrizes quadradas de ordem n , sobre \mathbb{R} , com essa estrutura é denotado por Z_n . Note-se que uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ pertence a Z_n se e somente se pode ser expressa na forma $A = \alpha I - B$, para alguma matriz quadrada $B \geq 0$ e algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

As matrizes desta forma ocorrem frequentemente relacionadas com sistemas de equações lineares ou não lineares, em problemas de valores próprios numa gama variada de áreas, incluindo métodos de diferenças finitas para equações diferenciais parciais, modelos económicos de entrada-saída e de crescimento, problemas de complementaridade linear e processos de Markov em Probabilidades e Estatística.

Uma matriz $A \in Z_n$ diz-se uma M -matriz se A pode escrever-se como $A = \alpha I - B$, onde $B \geq 0$ e $\alpha > \rho(B)$.

Exemplo 1.21. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser expressa na forma $A = 10I - B$, com

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Note-se que $10 > \rho(B)$. A é, portanto, uma M -matriz.

Esta classe de matrizes surge em inúmeras áreas de aplicação e, certamente devido a este facto, podemos encontrar na literatura variadas caracterizações das M -matrizes (ver, por exemplo, [31]), das quais seleccionámos as que se seguem.

Proposição 1.4. *Seja A uma matriz de Z_n . As seguintes afirmações são equivalentes.*

M1. A é uma M -matriz.

M2. A é uma P -matriz.

M3. Os menores principais descendentes de A são positivos.

M4. A é não singular e $A^{-1} \geq 0$.

Os seguintes factos sobre a classe das M -matrizes serão fundamentais no estudo do problema de completamento associado.

Proposição 1.5. *Seja A uma M -matriz de ordem n . Então,*

i. A^T é uma M -matriz.

ii. Dada uma matriz de permutação P de ordem n , PAP^T é uma M -matriz.

iii. Se D é uma matriz diagonal positiva $n \times n$, então DA , AD e DAD^{-1} são M -matrizes.

iv. Toda a submatriz principal de A é uma M -matriz.

Tal como a classe das P -matrizes, esta classe não é invariante para a adição e para a multiplicação de matrizes.

Note-se, ainda, que a soma directa de M -matrizes é, também, uma M -matriz.

Baseados na caracterização $P2$ das P -matrizes anteriormente referida, Johnson e Smith apresentam, em [42], uma nova caracterização da classe das M -matrizes que classificam de *caracterização transformacional*. Os autores mostram que uma matriz quadrada de ordem n A é uma M -matriz se e só se para cada vector não nulo $x \in \mathbb{R}^n$, x e Ax são duplamente sinal-relacionados.

Associados às caracterizações transformacionais, temos os *problemas de interpolação linear*. O problema de interpolação linear para uma dada classe de matrizes \mathcal{C} consiste em identificar todos os pares $x, y \in \mathbb{R}^n$, com $x \neq 0$, para os quais existe uma matriz $A \in \mathcal{C}$ tal que $Ax = y$. Claramente, uma caracterização transformacional de uma dada classe \mathcal{C} está relacionada com uma solução do problema de interpolação linear para \mathcal{C} .

No trabalho atrás referido, Johnson e Smith abordam o problema de interpolação linear para a classe das M -matrizes, mostrando que, dados $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo e $y \in \mathbb{R}^n$, existe uma M -matriz A , $n \times n$, tal que $Ax = y$ se e somente se x e y são duplamente sinal-relacionados. Consideram, ainda, o problema de interpolação para as P -matrizes e provam que, para $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo e $y \in \mathbb{R}^n$, existe uma P -matriz A , de ordem n , tal que $Ax = y$ se e só se x e y são sinal-relacionados.

Continuando dentro da classe das P -matrizes, temos outras famílias de matrizes, relacionadas com condições de simetria ou de positividade. Consideraremos, mais à frente, um problema de completamento de P -matrizes sob certas condições nas entradas das matrizes: restringiremos o estudo às chamadas matrizes duplamente negativas. Uma matriz real A , $n \times n$, diz-se *duplamente negativa* se A é simétrica, definida negativa e todos os seus elementos são negativos. Por uma questão de simplificação de escrita, dizemos que A é uma DN -matriz.

Note-se que A é uma DN -matriz se e somente se $(-A)^T = -A$, $-A$ é definida positiva e todos os elementos de $-A$ são positivos. Tendo em conta esta caracterização, podemos afirmar que A é uma DN -matriz se e somente se $(-A)^T = -A$, $\det(-A) [\{1, \dots, i\}] > 0$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$, e todos os elementos de $-A$ são positivos (ver [30]). Podemos, ainda, dizer que A é uma DN -matriz se e somente se $-A$ é uma P -matriz positiva simétrica.

Exemplo 1.22. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0,45 & -0,016 \\ -0,45 & -1 & -0,9 \\ -0,016 & -0,9 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma DN -matriz, uma vez que $-A$ é uma P -matriz positiva simétrica.

Tendo em conta esta última caracterização, é fácil de verificar que toda a submatriz principal de uma DN -matriz é, ainda, uma DN -matriz.

Os seguintes simples factos são também relevantes para o estudo que nos propomos desenvolver. As suas demonstrações são triviais, dada a caracterização das DN -matrizes a partir das P -matrizes com condições de simetria e positividade.

Facilmente se comprova que a classe das DN -matrizes não é invariante para a multiplicação diagonal, à direita ou à esquerda, nem para a semelhança diagonal. No entanto, a classe em questão é invariante para a congruência diagonal positiva ou negativa e para a semelhança de permutação, como traduz o seguinte resultado.

Lema 1.14. *Seja A uma DN -matriz $n \times n$. Então,*

- i. se P é uma matriz de permutação, $P^T A P$ é uma DN -matriz;*
- ii. se D é uma matriz diagonal positiva ou negativa, $D A D$ é uma DN -matriz.*

É também simples de verificar que toda a DN -matriz é diagonalmente congruente a uma DN -matriz cujas entradas diagonais são iguais a -1 .

1.3.4 Matrizes principalmente não singulares

De entre muitas das classes de matrizes discutidas nas secções anteriores, podemos destacar uma característica comum: qualquer submatriz principal de uma N -, TN -, P -, M - ou DN -matriz é regular. Estas classes estão, de facto, contidas na classe das chamadas matrizes principalmente não singulares. Uma matriz quadrada A sobre o corpo dos reais diz-se *principalmente não singular* se toda a sua submatriz principal é não singular. Por uma questão de simplificação, diremos que uma matriz principalmente não singular é uma PN -matriz, seguindo a notação adoptada em [42].

Exemplo 1.23. A seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma PN -matriz, uma vez que todas as submatrizes principais de A são invertíveis, enquanto que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz principalmente não singular pois a submatriz principal $B[\{1\}]$ é nula.

No trabalho acima referido, Johnson e Smith apresentam uma caracterização transformacional desta classe de matrizes: uma matriz A de ordem n , sobre \mathbb{R} , é uma PN -matriz se e somente se para todo o n -vector x não nulo, $x \circ Ax \neq 0$. Com base nesta caracterização, obtêm uma solução do problema de interpolação linear para a classe das PN -matrizes: dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$, existe uma PN -matriz A tal que $Ax = y$ se e só se $x \circ y \neq 0$.

Os seguintes simples factos são de demonstração trivial.

Proposição 1.6. *Seja A uma PN -matriz $n \times n$. Então,*

- i. se D é uma matriz diagonal de ordem n não singular, DA , AD e DAD^{-1} são PN -matrizes.*
- ii. se P é uma matriz de permutação $n \times n$, PAP^T é uma PN -matriz.*
- iii. se B é uma PN -matriz $m \times m$ e C é uma matriz sobre \mathbb{R} do tipo $n \times m$, as matrizes*

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$$

são PN -matrizes.

iv. A^{-1} é uma PN -matriz.

v. toda a submatriz principal de A é uma PN -matriz.

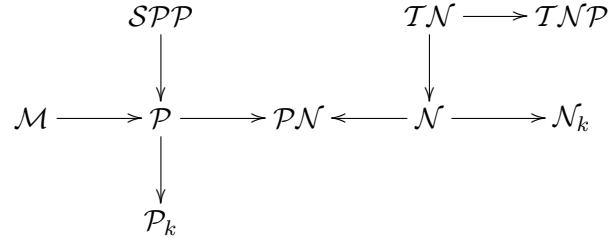
Facilmente se verifica, ainda, que a soma e o produto de PN -matrizes não são, em geral, PN -matrizes.

1.3.5 Relações entre as classes de matrizes

Apresentamos, nesta secção, um breve resumo das relações existentes entre as várias classes de matrizes consideradas nas secções anteriores.

Representamos por \mathcal{N}_k a classe das N_k -matrizes e analogamente por \mathcal{N} a das N -matrizes, por \mathcal{TN} a das TN -matrizes, por \mathcal{TNP} a das TNP -matrizes, por \mathcal{P} a das P -matrizes, por \mathcal{P}_k a das P_k -matrizes, por \mathcal{DN} a das DN -matrizes, por \mathcal{SPP} a das P -matrizes simétricas positivas, por \mathcal{M} a das M -matrizes e por \mathcal{PN} a das PN -matrizes.

No seguinte quadro, descrevemos as relações de inclusão entre estas classes de matrizes.



Note-se que a classe \mathcal{SPP} está estreitamente relacionada com a classe \mathcal{DN} .

Podemos, ainda, afirmar que toda a submatriz principal própria da inversa de uma N -matriz é uma P -matriz, ou, por outras palavras, dada uma N -matriz A , $n \times n$, A^{-1} é uma matriz da classe \mathcal{P}_{n-1} . Com efeito, $\det A^{-1}[\alpha] = \det A[\alpha'] (\det A)^{-1} > 0$, para todo $\alpha \subset \{1, \dots, n\}$, e $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} < 0$.

Capítulo 2

Completamentos de N_k -matrizes parciais

Uma N_k -matriz é uma matriz cujas submatrizes principais de ordem não superior a k têm determinante negativo. Neste capítulo, abordamos o problema de completamento de N_k -matrizes, isto é, procuramos determinar que matrizes parciais quadradas admitem completamentos que são N_k -matrizes. Ao longo dessa análise enveredamos por uma perspectiva combinatória, motivados por variados trabalhos sobre problemas de completamento de matrizes.

Numa primeira secção, consideramos matrizes parciais cujas submatrizes principais totalmente especificadas têm determinante negativo: as N -matrizes parciais, um caso particular das chamadas N_k -matrizes parciais. Começamos por analisar o caso combinatorialmente simétrico, apresentando resultados relativos a grafos cordais e resolvendo o caso associado a ciclos não dirigidos. No respeitante a matrizes não combinatorialmente simétricas, garantimos a existência de um N -completamento de N -matrizes parciais cujo grafo das entradas especificadas é acíclico. Consideramos grafos dirigidos em que os ciclos têm um papel importante. Terminamos esta secção com o estudo do problema de completamento de N -matrizes simétricas: exigimos, para além dos menores principais negativos, a simetria da matriz. Garantimos a existência de um N -completamento simétrico de N -matrizes simétricas parciais cujos grafos associados são cordais e apresentamos condições necessárias e suficientes para a existência do completamento desejado para o caso dos ciclos.

Finalmente, apresentamos um estudo do problema de completamento das N_k -matrizes parciais $n \times n$ em que $k < n$.

2.1 N –matrizes parciais

Nesta secção, centramos o nosso estudo na classe das N –matrizes. Consideramos, então, as matrizes A $n \times n$, sobre o corpo dos reais, tais que $\det A[\alpha] < 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Analizamos, aqui, o problema de completamento associado a esta classe de matrizes: pretendemos determinar quais as matrizes parciais que admitem N –matrizes como completamentos. Analisando esta questão, deparamo-nos com algumas condições que nos permitem dirigir o estudo para um conjunto mais restrito de matrizes parciais.

Na literatura, nada encontrámos sobre N –matrizes no contexto de matrizes parciais. Abordamos, no entanto, este problema seguindo uma metodologia análoga à adoptada por vários autores em problemas de completamento como o das P – ou M –matrizes.

Por questão de simplificação de escrita, chamamos N –completamento a qualquer completamento de uma matriz parcial que seja uma N –matriz.

Ao longo desta secção, assumimos, excepto quando se refira o contrário, que todos os elementos da diagonal principal são prescritos.

Relembremos que todas as submatrizes principais de uma N –matriz são, ainda, N –matrizes. Para que uma matriz parcial admita N –completamentos, as suas submatrizes principais totalmente especificadas terão de ser, necessariamente, N –matrizes. Definimos, então, as N –matrizes parciais.

Definição 2.1. *Uma matriz parcial diz-se uma N –matriz parcial se todas as suas submatrizes principais totalmente especificadas são N –matrizes.*

Exemplo 2.1. A matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} ? & -1 & -2 & ? \\ -1 & -2 & 7 & ? \\ ? & ? & -1 & 2 \\ ? & 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma N –matriz parcial, uma vez que as suas submatrizes principais totalmente especificadas, $A[\{2\}]$, $A[\{3\}]$, $A[\{4\}]$ e $A[\{3, 4\}]$, são N –matrizes. Já a matriz parcial

$$B = \begin{bmatrix} ? & -1 & -2 & ? \\ -1 & -2 & 7 & -1 \\ ? & ? & -1 & 2 \\ ? & 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

não é uma N -matriz parcial, dado que $B[\{2, 4\}]$ não é uma N -matriz.

Note-se que para que uma matriz parcial admita N -completamentos é, então, necessário que seja uma N -matriz parcial.

Relembremos que a classe das N -matrizes é invariante para as semelhanças diagonais e de permutação, bem como para a multiplicação diagonal positiva. Nesse sentido, podemos trabalhar com representantes para as classes de matrizes semelhantes por semelhança diagonal ou de permutação. Podemos assumir, ainda, certas condições sobre as entradas diagonais, sempre que seja conveniente. De facto, se A e B são matrizes parciais para as quais existe uma matriz de semelhança de permutação ou diagonal admissível S tal que $B = SAS^{-1}$, então há uma correspondência biunívoca entre os N -completamentos de A e os de B . Relativamente à multiplicação diagonal positiva, seja C uma matriz parcial para a qual existe uma matriz diagonal positiva $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ tal que $C = AD$ ou $C = DA$, no sentido em que as posições prescritas de C são exactamente as de A e em que cada entrada especificada c_{ij} de C é exactamente igual a $a_{ij}d_j$ ou d_ia_{ij} , consoante o caso, sendo a_{ij} uma entrada especificada de A . Se C_c é um N -completamento de C , então $A_c = C_cD^{-1}$ ou $A_c = D^{-1}C_c$, consoante o caso, é um N -completamento de A . Podemos, portanto, assumir, sem perda de generalidade, que as entradas diagonais de uma N -matriz parcial são todas iguais a -1 .

Atendendo ao Lema 1.2, sabemos que todas as entradas de uma N -matriz são não nulas. Sabemos, ainda, pelo Lema 1.3, que toda a N -matriz é sinal-simétrica.

Sendo assim, não fará sentido estudar a existência de N -completamentos de N -matrizes parciais com alguma entrada nula ou não sinal-simétricas, como ilustram os exemplos que se seguem.

Exemplo 2.2. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ ? & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

As únicas submatrizes principais de A totalmente especificadas são $A[\{1\}]$, $A[\{2\}]$, $A[\{3\}]$, $A[\{1, 2\}]$ e $A[\{2, 3\}]$ que são, claramente, N -matrizes. Logo, A é uma N -matriz parcial. No entanto, A não admite N -completamentos. Com efeito, qualquer completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ c & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

de A não é uma N -matriz pelo Lema 1.2.

Exemplo 2.3. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} ? & ? & -2 \\ ? & -1 & ? \\ 3 & ? & -1 \end{bmatrix}.$$

As únicas submatrizes principais de A totalmente especificadas, $A[\{2\}]$ e $A[\{3\}]$, são N -matrizes. Logo, A é uma N -matriz parcial. Notemos que A não é sinal-simétrica. Facilmente se verifica que A não admite N -completamentos: qualquer completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & -2 \\ c_{21} & -1 & c_{23} \\ 3 & c_{32} & -1 \end{bmatrix}$$

de A não é uma N -matriz pelo Lema 1.3.

O seguinte resultado permite-nos afirmar que a simetria de sinal e a não existência de entradas especificadas nulas são condições necessárias e suficientes para que uma N -matriz parcial 2×2 admita N -completamentos. Neste caso particular, admitimos a possibilidade de existirem elementos diagonais não especificados.

Proposição 2.1. *Seja A uma N -matriz parcial 2×2 sinal-simétrica sem entradas especificadas nulas. Então, A admite N -completamentos.*

Demonstração. Se A não tem entradas especificadas ou se A é totalmente especificada, o resultado é trivial.

Denotamos por U_E o número de entradas não especificadas de A .

Consideramos os seguintes casos:

(a) $U_E = 1$

Considerando as semelhanças de permutação adequadas, podemos supor que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & ? \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix},$$

com $a_{11}, a_{22} > 0$, ou da forma

$$A = \begin{bmatrix} ? & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix},$$

com $a_{22} > 0$. No primeiro caso basta considerar um completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & c \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$

de A tal que $a_{21}c > a_{11}a_{22}$. Atendendo a que $a_{21} \neq 0$, tais completamentos existem. No segundo caso, é suficiente considerar um completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -c & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$$

de A com $0 < c < a_{12}a_{21}a_{22}^{-1}$. Como A é sinal-simétrica, $a_{12}a_{21} > 0$ e, consequentemente, tais completamentos existem.

(b) $U_E > 1$

Neste caso, podemos completar algumas das entradas de A até obtermos uma N -matriz parcial com uma única entrada não especificada e aplicamos o caso (a).

Provámos, deste modo, que toda a N -matriz parcial 2×2 sinal-simétrica sem entradas nulas admite N -completamentos. \square

O resultado anterior não pode ser generalizado para um n qualquer. De facto, uma N -matriz parcial $n \times n$ sinal-simétrica e sem entradas especificadas nulas não admite, em geral, um N -completamento quando $n \geq 3$ e A é não combinatorialmente simétrica e quando $n \geq 4$ e A é combinatorialmente simétrica. Atendamos aos exemplos que se seguem.

Exemplo 2.4. Seja A a seguinte matriz parcial não combinatorialmente simétrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & ? & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ ? & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que A é sinal-simétrica e não tem entradas especificadas nulas. As submatrizes principais de A totalmente especificadas são, exactamente, $A[\{1\}]$, $A[\{2\}]$, $A[\{3\}]$ e $A[\{2, 3\}]$. Dado que tais submatrizes são N -matrizes, segue-se que A é uma N -matriz parcial. No entanto, A não admite N -completamentos. De facto, qualquer completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & c_{12} & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ c_{31} & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

de A não é uma N -matriz. Pelo Lema 1.3, teríamos de ter $c_{12}, c_{31} > 0$. Assim, $\det A_c = 13 + 2c_{12} + 3c_{31} + c_{12}c_{31} > 0$.

Mergulhando a matriz A do exemplo anterior como submatriz principal, escolhendo -1 's para os elementos da diagonal principal e entradas não prescritas para as restantes posições, podemos construir, para $n \geq 4$, uma N -matriz parcial

não combinatorialmente simétrica $n \times n$, sinal-simétrica e sem entradas especificadas nulas, que não admite N -completamentos: a matriz parcial

$$M = \begin{bmatrix} A & X \\ Y & \bar{I} \end{bmatrix},$$

onde \bar{I} é a matriz parcial $(n-3) \times (n-3)$ cujas entradas especificadas são exactamente as da diagonal principal, iguais a -1 , e X e Y são totalmente não especificadas.

Exemplo 2.5. Consideremos a matriz parcial combinatorialmente simétrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? & -3 \\ 2 & -1 & 1 & ? \\ ? & 2 & -1 & 1 \\ -4 & ? & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A é sinal-simétrica e não tem entradas especificadas nulas. As submatrizes principais de A totalmente especificadas são N -matrizes, pelo que A é uma N -matriz parcial. No entanto, A não admite N -completamentos. Com efeito, qualquer completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & c_{13} & -3 \\ 2 & -1 & 1 & c_{24} \\ c_{31} & 2 & -1 & 1 \\ -4 & c_{42} & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

de A não é uma N -matriz. Dado que $\det A_c[\{2, 3, 4\}] = 3 + c_{24}c_{42} + 4c_{24} + c_{42}$, para que este menor principal seja negativo, é necessário $c_{24}, c_{42} < 0$. No entanto, se $c_{24}, c_{42} < 0$, então $\det A_c[\{1, 2, 4\}] = 13 + c_{24}c_{42} - 4c_{24} - 6c_{42} > 0$.

Podemos generalizar este exemplo para N -matrizes parciais $n \times n$, com $n \geq 5$, seguindo um procedimento análogo ao do exemplo 2.4.

Por forma a não considerar N -matrizes parciais como as dos exemplos anteriores, definimos o conjunto \mathcal{PS}_n das matrizes parciais $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ tais que $a_{ij} \neq 0$ e $\text{sign}(a_{ij}) = (-1)^{i+j+1}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que a entrada (i, j) é especificada.

Atendendo a que toda a N -matriz $n \times n$ é semelhante, por meio de semelhança diagonal, a uma matriz pertencente a \mathcal{S}_n , podemos concluir que se uma dada matriz parcial A não é diagonalmente semelhante a uma matriz parcial de \mathcal{PS}_n , então A não admite N -completamentos. Sendo assim, ser diagonalmente semelhante a uma matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n é uma condição necessária para que uma N -matriz parcial admita N -completamentos.

Ao restringirmos o nosso estudo a N -matrizes parciais pertencentes a \mathcal{PS}_n , estamos, pois, implicitamente a estudar, também, as N -matrizes parciais que são semelhantes por semelhança diagonal a uma matriz de \mathcal{PS}_n . Atendamos, por exemplo, às N -matrizes parciais cujos elementos especificados são todos negativos. Facilmente se verifica que, dada uma tal matriz parcial A , existe uma N -matriz parcial B , semelhante a A por meio de uma semelhança diagonal, tal que $B \in \mathcal{PS}_n$. Note-se que A admite N -completamentos se e só se B admite N -completamentos.

Observe-se que qualquer N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n é sinal-simétrica e não tem entradas especificadas nulas.

Logo, qualquer N -matriz parcial de \mathcal{PS}_2 admite N -completamentos. É válido um resultado análogo para \mathcal{PS}_3 .

Proposição 2.2. *Seja A uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_3 . Então, existe um N -completamento A_c de A .*

Demonstração. Seja A uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_3 . Sem perda de generalidade, podemos assumir que os elementos da diagonal principal são iguais a -1 .

Denotamos por U_E o número de entradas não especificadas de A .

Quando $U_E = 0$ ou $U_E = 6$, o resultado é trivial.

Estudemos, de seguida, o caso em que A tem uma única entrada não especificada. Por semelhança de permutação e por semelhança diagonal, podemos assumir que essa entrada está na posição $(1, 3)$ e que as entradas da diagonal superior são iguais a 1. Assim, A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? \\ a_{21} & -1 & 1 \\ -a_{31} & a_{32} & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{21}, a_{32} > 1$ e $a_{31} > 0$. Pretendemos provar a existência de um real positivo c tal que o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -c \\ a_{21} & -1 & 1 \\ -a_{31} & a_{32} & -1 \end{bmatrix}$$

de A seja uma N -matriz.

Se $a_{31} > 1$, basta considerar $c = 1$. Note-se, nesse caso, que

$$\det A_c [\{1, 3\}] = 1 - a_{31} < 0$$

e

$$\det A_c = (a_{21} - 1)(1 - a_{32}) < 0.$$

Se $a_{31} = 1$, então A_c é uma N -matriz para qualquer $c > 1$. Com efeito, temos que

$$\det A_c [\{1, 3\}] = 1 - c.$$

Além disso, $\det A_c < 0$ se e só se

$$c > ((a_{21} - 1) + (a_{32} - 1))(a_{21}a_{32} - 1)^{-1}.$$

Como

$$((a_{21} - 1) + (a_{32} - 1))(a_{21}a_{32} - 1)^{-1} < 1$$

e $c > 1$, $\det A_c < 0$. No caso em que $a_{31} < 1$, o completamento obtido para $c = (a_{31}^2)^{-1}$ é uma N -matriz. Atendendo a que

$$\det A_c [\{1, 3\}] = 1 - a_{31}^{-1}$$

e a que

$$\det A_c = (a_{21} - 1)(1 - a_{32}) + ((a_{31}^2)^{-1} - 1)(a_{31} - a_{21}a_{32}) < 0,$$

podemos, de facto, afirmar que A_c é uma N -matriz.

Os casos em que $U_E > 1$ reduzem-se ao caso em que $U_E = 1$. De facto, é possível completar um número de entradas não especificadas adequado a cada caso de modo a obter uma N -matriz em \mathcal{PS}_3 com uma única entrada não especificada. Note-se que, nesse processo, apenas submatrizes principais de ordem inferior a 3 são totalmente especificadas. \square

Como consequência da proposição anterior, surge o seguinte resultado.

Corolário 2.1. *Toda a N -matriz parcial combinatorialmente simétrica 3×3 admite N -completamentos.*

Demonstração. Começamos por considerar uma N -matriz parcial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ combinatorialmente simétrica com exactamente um par de entradas não especificadas. Sem perda de generalidade, podemos admitir que tais entradas não especificadas estão nas posições $(1, 3)$ e $(3, 1)$ e que as entradas diagonais são iguais a -1 . Sendo $D = \text{diag}(1, a_{12}, a_{12}a_{23})$, temos que DAD^{-1} é a N -matriz parcial

$$DAD^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? \\ a_{12}a_{21} & -1 & 1 \\ ? & a_{23}a_{32} & -1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que DAD^{-1} pertence a \mathcal{PS}_3 . Logo, pela Proposição 2.2, admite um N -completamento C . Portanto, $D^{-1}CD$ é um N -completamento de A .

Se A é uma N -matriz parcial 3×3 combinatorialmente simétrica com mais do que um par de entradas posicionalmente simétricas não especificadas, basta completar alguns desses pares até obtermos uma N -matriz parcial com exactamente um par de entradas especificadas, posicionalmente simétricas. Note-se que, nesse processo, completamos totalmente apenas submatrizes parciais de ordem inferior a 3. \square

O resultado descrito na Proposição 2.2 não é generalizável para $n \geq 4$, como o exemplo que se segue ilustra.

Exemplo 2.6. Seja A a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -11 & ? \\ 2 & -1 & 1 & -200 \\ -0,1 & 10 & -1 & 1 \\ 1 & -10 & 1,01 & -1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que A é uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_4 . Vejamos que A não admite N -completamentos. Dado um qualquer real c , o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -11 & c \\ 2 & -1 & 1 & -200 \\ -0,1 & 10 & -1 & 1 \\ 1 & -10 & 1,01 & -1 \end{bmatrix}$$

de A não é uma N -matriz.

Temos $\det A_c[\{1, 2, 4\}] = 1801 - 19c$ e $\det A_c[\{1, 3, 4\}] = -9,89 + 0,899c$. Por forma a que estes menores sejam ambos negativos, c tem de ser tal que $c > 1801/19$ e $c < 9,89/0,899$, o que é impossível.

O exemplo anterior permite-nos obter o seguinte resultado.

Proposição 2.3. *Para todo o $n \geq 4$, existe uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n que não admite N -completamentos.*

Demonstração. Denotamos por \bar{I} a matriz parcial $(n-4) \times (n-4)$ com todas as entradas não especificadas, excepto as da diagonal principal que são iguais a -1 . A matriz parcial

$$B = \begin{bmatrix} A & X \\ Y & \bar{I} \end{bmatrix},$$

onde X e Y são matrizes totalmente não especificadas e A é a matriz parcial do exemplo 2.6, é uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n . Como $B[\{1, 2, 3, 4\}]$ não admite N -completamentos, também B não admite N -completamentos. \square

A suficiência da condição *pertencer a* \mathcal{PS}_n para garantir a existência de um N -completamento de uma N -matriz parcial combinatorialmente simétrica de ordem n é ainda um problema em aberto para $n \geq 4$.

Como referimos no início desta secção, assumimos que as entradas diagonais são especificadas. No entanto, o problema de completamento de N -matrizes em \mathcal{PS}_n não se reduz ao problema de completamento de N -matrizes em \mathcal{PS}_n com a diagonal principal especificada, como podemos comprovar com o seguinte exemplo.

Exemplo 2.7. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} ? & 1 & -0,05 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que A é uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_3 . A N -matriz parcial definida pelas entradas diagonais de A especificadas admite N -completamentos (de facto, é uma N -matriz totalmente especificada). No entanto, qualquer completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} c & 1 & -0,05 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

de A não é uma N -matriz. Com efeito, teríamos de ter $-0,05 < c < 0$, mas, nesse caso, $\det A_c = -2c + 1,6 > 0$.

Tendo em conta todos estes resultados, o avanço deste nosso estudo leva-nos a introduzir algum tipo de restrição sobre o padrão da matriz parcial. Consideramos, então, nas duas secções que se seguem, e separadamente, o problema em questão para N -matrizes parciais combinatorialmente simétricas e para N -matrizes parciais não combinatorialmente simétricas, procurando determinar sob que condições no grafo associado à matriz parcial podemos garantir a existência de um completamento que seja uma N -matriz.

2.1.1 Matrizes parciais combinatorialmente simétricas

Nesta secção focamos o estudo do problema de completamento em questão em determinadas matrizes parciais combinatorialmente simétricas, pertencentes a \mathcal{PS}_n e com todas as entradas diagonais prescritas.

Começamos por abordar as matrizes parciais cujos grafos das entradas especificadas são grafos 1-cordais.

Lema 2.1. *Seja A uma N -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal com dois cliques maximais, tendo um desses cliques dois vértices. Então, A admite N -completamentos.*

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $A = (\bar{a}_{ij})_{i,j=1}^n$ é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? & ? & \dots & ? \\ a_{21} & -1 & 1 & -a_{24} & \dots & (-1)^{n+1}a_{2n} \\ ? & a_{32} & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n+2}a_{3n} \\ ? & -a_{42} & a_{43} & -1 & \dots & (-1)^{n+3}a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & (-1)^{n+1}a_{n2} & (-1)^{n+2}a_{n3} & (-1)^{n+3}a_{n4} & \dots & -1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos o completamento $A_c = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ de A definido por

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \bar{a}_{ij} \text{ se a entrada } (i, j) \text{ de } A \text{ é especificada,} \\ c_{1j} &= -\bar{a}_{2j} \text{ para todo } j \in \{3, \dots, n\}, \\ c_{i1} &= -\bar{a}_{i2} \text{ para todo } i \in \{3, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Mostremos que A_c é uma N -matriz. Sabemos, por hipótese, que, para todo $\alpha \subseteq \{2, \dots, n\}$, $\det A_c[\alpha] < 0$. Sabemos, também, que, para $\alpha \subseteq \{1, 2\}$, $\det A_c[\alpha] < 0$. Resta-nos, pois, provar que $\det A_c[\{1\} \cup \alpha] < 0$, para todo $\alpha \subseteq \{2, \dots, n\}$. Seja, então, $\alpha \subseteq \{2, \dots, n\}$. Consideramos os seguintes dois casos:

(a) $2 \notin \alpha$

Neste caso, $A_c[\{2\} \cup \alpha]$ obtém-se de $A_c[\{1\} \cup \alpha]$ multiplicando a primeira linha e a primeira coluna por -1 . Logo, $\det A_c[\{1\} \cup \alpha] = \det A_c[\{2\} \cup \alpha] < 0$.

(b) $2 \in \alpha$

Neste caso, somando a segunda linha à primeira linha de $A_c[\{1\} \cup \alpha]$, obtemos uma matriz da forma

$$\bar{A}_c[\{1\} \cup \alpha] = \left[\begin{array}{c|c} a_{21} - 1 & 0 \\ \hline * & A_c[\alpha] \end{array} \right].$$

Assim, $\det A_c[\{1\} \cup \alpha] = \det \bar{A}_c[\{1\} \cup \alpha] = (a_{21} - 1) \det A_c[\alpha] < 0$.

Provámos, deste modo, que A_c é uma N -matriz. □

Apesar do resultado anterior ser um caso particular da proposição que se segue, a sua demonstração apresentar-se-á bastante útil na resolução do problema de completamento de N -matrizes com determinados tipos de grafos associados às matrizes parciais.

Proposição 2.4. *Seja A uma N -matriz parcial $n \times n$, cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal com dois cliques maximais. Então, A admite N -complementos.*

Demonstração. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & X \\ a_{21}^T & -1 & a_{23}^T \\ Y & a_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

onde X e Y são matrizes totalmente não especificadas e os restantes elementos de A são prescritos. Consideremos o complemento

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & -a_{12}a_{23}^T \\ a_{21}^T & -1 & a_{23}^T \\ -a_{32}a_{21}^T & a_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

de A . Mostremos que A_c é uma N -matriz. Sejam α e β os subconjuntos de $N = \{1, \dots, n\}$ tais que

$$A_c[\alpha] = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{21}^T & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$A_c[\beta] = \begin{bmatrix} -1 & a_{23}^T \\ a_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Seja $|\alpha| = k$ (logo, k é o índice da entrada do vértice separador minimal). Consideremos $\gamma \subseteq N$. Existem dois casos possíveis:

(a) $k \in \gamma$

Neste caso,

$$\det A_c[\gamma] = (-1) \det A_c[\gamma \cap \alpha] \det A_c[\gamma \cap \beta] < 0.$$

(b) $k \notin \gamma$

Estudemos o caso em que $\gamma = N - \{k\}$. Os restantes casos são análogos. Aplicando a identidade de Jacobi, sabemos que

$$\det A_c[\gamma] = \det A_c^{-1}[\{k\}] \det A_c.$$

Atendendo ao caso (a), sabemos que $\det A_c < 0$. Assim, $\det A_c[\gamma] < 0$ se e só se $\det A_c^{-1}[\{k\}] > 0$. Por outro lado,

$$A_c^{-1} = \begin{bmatrix} A_c[\alpha]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_c[\beta]^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a identidade de Jacobi, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\det A_c^{-1}[\{k\}] &= \frac{\det A_c[\alpha][\{k\}']}{\det A_c[\alpha]} + \frac{\det A_c[\beta][\{1\}']}{\det A_c[\beta]} + 1 \\ &= \frac{\det A_{11}}{\det A_c[\alpha]} + \frac{\det A_{33}}{\det A_c[\beta]} + 1 > 0.\end{aligned}$$

Logo, $\det A_c[\gamma] < 0$. □

Podemos generalizar este resultado do seguinte modo:

Teorema 2.1. *Seja G um grafo não dirigido 1-cordal conexo. Toda a N -matriz parcial cujo grafo associado é G admite N -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução no número p de cliques maximais de G . Para $p = 2$, obtemos o completamento desejado aplicando a Proposição 2.4. Admitamos, agora, que o resultado é válido para um grafo 1-cordal com $p - 1$ cliques maximais e provemos a propriedade para grafos 1-cordais com p cliques maximais.

Consideremos uma matriz parcial A cujo grafo das entradas especificadas é um grafo não dirigido 1-cordal conexo G , com p -cliques maximais. Seja G_1 o subgrafo induzido por dois cliques maximais com um vértice em comum. Aplicando a Proposição 2.4 à submatriz principal A_1 de A cujo grafo das entradas especificadas é G_1 , e substituindo em A essa submatriz parcial pelo N -completamento obtido A_{1c} , obtemos uma N -matriz parcial \bar{A} cujo grafo associado é 1-cordal com $p - 1$ cliques maximais. A hipótese de indução permite-nos garantir a existência de um N -completamento de \bar{A} . Note-se que tal matriz é, obviamente, um completamento de A . □

O problema de completamento para N -matrizes parciais cujo grafo associado é p -cordal, $p > 1$, continua em aberto. Note-se que qualquer grafo p -cordal, com $p > 1$, contém, como subgrafo induzido, um duplo triângulo. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que uma N -matriz parcial 4×4 , cujo grafo das entradas especificadas é um grafo 2-cordal, é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -a_{13} & ? \\ a_{21} & -1 & 1 & -a_{24} \\ -a_{31} & a_{32} & -1 & 1 \\ ? & -a_{42} & a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{21}, a_{32}, a_{43} > 1$, $a_{13}a_{31}, a_{24}a_{42} > 1$ e $\det A[\{1, 2, 3\}], \det A[\{2, 3, 4\}] < 0$. Se completarmos a entrada $(1, 4)$ com x e a entrada $(4, 1)$ com y , facilmente se verifica que o determinante da matriz $A_{x,y}$ obtida é dado por

$$\begin{aligned}\det A_{x,y} &= (a_{32} - 1)xy - x \det A_0[\{2, 3, 4\}|\{1, 2, 3\}] \\ &\quad - y \det A_0[\{1, 2, 3\}|\{2, 3, 4\}] + \det A_0.\end{aligned}$$

Se $\det A_0 [\{1, 2, 3\}|\{2, 3, 4\}] > 0$, então A admite um N -completamento. Consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -a_{13} & c \\ a_{21} & -1 & 1 & -a_{24} \\ -a_{31} & a_{32} & -1 & 1 \\ d & -a_{42} & a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

onde c é um real tal que

$$0 < c < \min\{a_{13}, a_{24}, (\det A_0 [\{1, 2, 3\}|\{2, 3, 4\}]) (a_{32} - 1)^{-1}\}.$$

O determinante de qualquer submatriz principal contendo a posição $(4, 1)$ é um polinómio em d com coeficiente director negativo. Logo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que A_c é uma N -matriz para $d > M$. Por outro lado, se $\det A_0 [\{2, 3, 4\}|\{1, 2, 3\}] > 0$, escolhendo

$$0 < d < \min\{a_{42}a_{21}, a_{43}a_{31}, (\det A_0 [\{2, 3, 4\}|\{1, 2, 3\}]) (a_{32} - 1)^{-1}\},$$

prova-se que existe $H \in \mathbb{R}$ tal que A_c é um N -completamento de A para $c > H$.

Assim, se $\det A_0 [\{1, 2, 3\}|\{2, 3, 4\}] > 0$ ou $\det A_0 [\{2, 3, 4\}|\{1, 2, 3\}] > 0$, A admite um N -completamento.

Mostremos, agora, que se cada submatriz principal associada a cada componente conexa de um grafo admite N -completamentos, também os admitirá a N -matriz parcial considerada. Deste modo, podemos assumir que o grafo é conexo e estudar, depois, o caso mais geral concluindo que a matriz parcial admite N -completamentos se e somente se cada uma das suas submatrizes parciais associadas às componentes conexas do grafo das entradas especificadas da matriz parcial admite N -completamentos.

Teorema 2.2. *Toda a N -matriz parcial semelhante por permutação a uma N -matriz parcial diagonal por blocos em que cada bloco da diagonal admite N -completamentos pode ser completada de modo a obter-se uma N -matriz.*

Demonstração. Consideremos uma matriz parcial diagonal por blocos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & ? & \dots & ? \\ ? & A_2 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

tal que A_i é uma N -matriz parcial $n_i \times n_i$ que admite N -completamentos, para todo o $i \in \{1, \dots, k\}$. Seja, então, \bar{A}_i um N -completamento de A_i , $i = 1, \dots, k$.

Consideremos, agora, a N -matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & ? & \dots & ? \\ ? & \bar{A}_2 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & \bar{A}_k \end{bmatrix}.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que cada bloco \bar{A}_i pertence a \mathcal{S}_{n_i} e que os elementos da diagonal principal de \bar{A} são iguais a -1 .

A demonstração segue por indução no número k de blocos da diagonal.

Estudemos, primeiro, o caso em que $k = 2$. Podemos escrever \bar{A} na forma

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{A}_1 & v & & ? \\ u^T & -1 & & \\ \hline & ? & -1 & w^T \\ & & z & \tilde{A}_2 \end{array} \right],$$

sendo

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & v \\ u^T & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & w^T \\ z & \tilde{A}_2 \end{bmatrix}.$$

Consideremos a N -matriz parcial obtida de \bar{A} especificando as entradas $(n_1, n_1 + 1), (n_1 + 1, n_1)$ com $1, 2$, respectivamente. Obtemos, portanto, a matriz parcial

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{A}_1 & v & ? & ? \\ u^T & -1 & 1 & ? \\ \hline ? & 2 & -1 & w^T \\ ? & ? & z & \tilde{A}_2 \end{array} \right].$$

Notemos que a submatriz principal $\tilde{A}[\{1, \dots, n_1 + 1\}]$ de \tilde{A} é uma N -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal conexo. Sabemos, então, que tal submatriz admite um N -complemento, digamos

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & v & x \\ u^T & -1 & 1 \\ y^T & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que o grafo associado à matriz parcial

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & v & x & ? \\ u^T & -1 & 1 & ? \\ y^T & 2 & -1 & w^T \\ ? & ? & z & \tilde{A}_2 \end{bmatrix}$$

é 1-cordal conexo, podemos afirmar que existe um N -completamento de tal matriz e, por conseguinte, de \tilde{A} , de \bar{A} e de A .

Estamos, agora, em condições de provar o resultado para $k > 2$.

Considerando a N -matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & ? & \dots & ? \\ ? & \bar{A}_2 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & \bar{A}_k \end{bmatrix},$$

apliquemos o raciocínio apresentado no caso $k = 2$ aos blocos da diagonal \bar{A}_1 e \bar{A}_2 . Obtemos um N -completamento B_1 , pertencente a $\mathcal{S}_{n_1+n_2}$, da submatriz

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1 & ? \\ ? & \bar{A}_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz parcial

$$\begin{bmatrix} B_1 & ? & \dots & ? \\ ? & \bar{A}_3 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

é uma N -matriz parcial diagonal por blocos com $k - 1$ blocos. Por hipótese de indução, podemos afirmar que tal matriz parcial admite N -completamentos. Obviamente, tais N -matrizes são, também, completamentos de \bar{A} e de A .

Atendendo a que a classe das N -matrizes é invariante para a semelhança de permutação, podemos, finalmente, concluir que toda a N -matriz parcial semelhante por permutação a uma N -matriz parcial diagonal por blocos em que cada bloco da diagonal admite N -completamentos pode ser completada de modo a obter-se uma N -matriz. \square

A partir deste passo, restringimos o nosso estudo do problema de completamento de N -matrizes às N -matrizes parciais cujo grafo associado é conexo, tanto no caso combinatorialmente simétrico como no caso não combinatorialmente simétrico.

Terminamos esta secção com a resolução do problema para as N -matrizes parciais combinatorialmente simétricas cujos grafos das entradas especificadas são ciclos.

Lema 2.2. *Qualquer N -matriz parcial combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_4 , cujo grafo associado é um ciclo admite N -completamentos.*

Demonstração. Seja A uma N -matriz parcial combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_4 , cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é a forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? & a_{14} \\ a_{21} & -1 & 1 & ? \\ ? & a_{32} & -1 & 1 \\ a_{41} & ? & a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{2,1}, a_{32}, a_{43} > 1$ e $a_{14}, a_{41} > 0$ tais que $a_{14}a_{41} > 1$.

Mostremos que é possível escolher $x, y \in \mathbb{R}^+$ de modo que

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -x & a_{14} \\ a_{21} & -1 & 1 & -y \\ -a_{32} & a_{32} & -1 & 1 \\ a_{41} & -a_{41} & a_{43} & -1 \end{bmatrix}$$

seja um N -completamento de A .

Se $x > a_{32}^{-1}$, então $\det A_c[\{1, 3\}] < 0$ e se $y > a_{41}^{-1}$, $\det A_c[\{2, 4\}] < 0$. Nessas condições,

$$\det A_c[\{1, 2, 3\}] = (a_{21} - 1) \det A_c[\{1, 3\}] < 0.$$

Além disso,

$$\det A_c[\{1, 2, 4\}] = (a_{21} - 1) \det A_c[\{1, 4\}] < 0.$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \det A_c &= \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & x & a_{14} \\ a_{21} & a_{21} - 1 & 1 & y \\ -a_{32} & 0 & -1 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & -1 \end{bmatrix} \\ &= (a_{21} - 1) \det A_c[\{1, 3, 4\}]. \end{aligned}$$

Pretendemos provar que existe $x > a_{32}^{-1}$ tal que $\det A_c[\{1, 3, 4\}] < 0$ e que existe $y > a_{41}^{-1}$ tal que $\det A_c[\{2, 3, 4\}] < 0$.

Sendo

$$\det A_c[\{1, 3, 4\}] = (a_{32} - a_{41})x - 1 - a_{14}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{41} + a_{43},$$

temos que $\det A_c[\{1, 3, 4\}] < 0$ se e somente se

$$(a_{41} - a_{32})x > -1 - a_{14}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{41} + a_{43}.$$

Consideramos os seguintes casos:

(a) $a_{41} - a_{32} = 0$

Neste caso, $\det A_c [\{1, 3, 4\}] = (1 - a_{14}a_{41})(a_{43} - 1) < 0$.

(b) $a_{41} - a_{32} > 0$

Escolhendo necessariamente $x > a_{32}^{-1}$, basta considerar, por forma a que $\det A_c [\{1, 3, 4\}]$ seja negativo,

$$x > \max \left\{ a_{32}^{-1}, (a_{41} - a_{32})^{-1} (-1 - a_{14}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{41} + a_{43}) \right\}.$$

(c) $a_{41} - a_{32} < 0$

Vejamos que, nestas condições, existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$a_{32}^{-1} < x < (a_{41} - a_{32})^{-1} (-1 - a_{14}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{41} + a_{43}).$$

Para tal, basta verificar que

$$a_{32}^{-1} < (a_{41} - a_{32})^{-1} (-1 - a_{14}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{41} + a_{43}).$$

Temos que

$$\begin{aligned} & a_{32}^{-1} < (a_{41} - a_{32})^{-1} (-1 - a_{14}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{41} + a_{43}) \\ \Leftrightarrow & a_{41}(1 - a_{14}a_{32}) > a_{43}a_{32}(1 - a_{14}a_{32}) \\ \Leftrightarrow & a_{41} < a_{43}a_{32}, \end{aligned}$$

uma vez que $a_{41} < a_{32}$ e $1 < a_{14}a_{41}$, pelo que $1 - a_{14}a_{32} < 0$. Atendendo a que $a_{41} < a_{32} < a_{43}a_{32}$, podemos, então, afirmar que existe x tal que

$$a_{32}^{-1} < x < (a_{41} - a_{32})^{-1} (-1 - a_{14}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{41} + a_{43}).$$

Vimos, deste modo, que é sempre possível escolher $x > a_{32}^{-1}$ tal que $A_c [\{1, 3, 4\}]$ tem determinante negativo.

Atendamos, agora, a $\det A_c [\{2, 3, 4\}]$. Temos que

$$\det A_c [\{2, 3, 4\}] = (a_{41} - a_{32}a_{43})y - 1 - a_{41} + a_{32} + a_{43}.$$

Assim, $\det A_c [\{2, 3, 4\}] < 0$ se e só se

$$(a_{32}a_{43} - a_{41})y > -1 - a_{41} + a_{32} + a_{43}.$$

Consideramos os seguintes três casos:

(a) $a_{32}a_{43} - a_{41} = 0$

Então, $\det A_c [\{2, 3, 4\}] = (1 - a_{32})(a_{43} - 1) < 0$.

(b) $a_{32}a_{43} - a_{41} > 0$

Para que $\det A_c[\{2, 3, 4\}]$ seja negativo e tendo em conta que pretendemos $y > a_{41}^{-1}$, basta considerar

$$y > \max \left\{ a_{41}^{-1}, (a_{32}a_{43} - a_{41})^{-1} (-1 - a_{41} + a_{32} + a_{43}) \right\}.$$

(c) $a_{32}a_{43} - a_{41} < 0$

Neste caso, mostremos que existe $y \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$a_{41}^{-1} < y < (a_{32}a_{43} - a_{41})^{-1} (-1 - a_{41} + a_{32} + a_{43}).$$

Temos que

$$\begin{aligned} a_{41}^{-1} &< (a_{32}a_{43} - a_{41})^{-1} (-1 - a_{41} + a_{32} + a_{43}) \\ \Leftrightarrow a_{43}(a_{32} - a_{41}) &> a_{41}(a_{32} - a_{41}) \\ \Leftrightarrow a_{43} &< a_{41}, \end{aligned}$$

uma vez que $a_{41} > a_{32}a_{43} > a_{32}$, donde $a_{32} - a_{41} < 0$. Como $a_{43} < a_{43}a_{32} < a_{41}$, podemos afirmar que existe y tal que

$$a_{41}^{-1} < y < (a_{32}a_{43} - a_{41})^{-1} (-1 - a_{41} + a_{32} + a_{43}).$$

Provámos, deste modo, que existem escolhas de $y > a_{41}^{-1}$ para as quais $\det A_c[\{2, 3, 4\}] < 0$.

Podemos, portanto, concluir que existem $x, y \in \mathbb{R}^+$ tais que A_c é uma N -matriz. \square

Teorema 2.3. *Toda a N -matriz parcial combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo grafo associado é um ciclo, admite N -complementos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução em n . Sabemos, pelo lema anterior, que o resultado é válido para $n = 4$. Sejam $n > 4$ e A uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? & \dots & ? & (-1)^n a_{1n} \\ a_{21} & -1 & 1 & \dots & ? & ? \\ ? & a_{32} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & 1 \\ (-1)^n a_{n1} & ? & ? & \dots & a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{ii-1} > 1$, para $i = 2, \dots, n$, e $a_{1n}, a_{n1} > 0$ tais que $a_{1n}a_{n1} > 1$.

Consideremos a N -matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? & \dots & ? & (-1)^{n-1}a_{1n} & ? \\ a_{21} & -1 & 1 & \dots & ? & ? & ? \\ ? & a_{32} & -1 & \dots & ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & 1 & ? \\ (-1)^{n-1}a_{n1} & ? & ? & \dots & a_{n-1n-2} & -1 & 1 \\ ? & ? & ? & \dots & ? & a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

pertencente a \mathcal{PS}_n . A sua submatriz principal $\bar{A}[\{1, \dots, n-1\}]$ é uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_{n-1} , cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo de comprimento $n-1$. Por hipótese de indução, existe um seu N -completamento C .

Seja \tilde{A} a N -matriz parcial, pertencente a \mathcal{PS}_n , obtida de \bar{A} completando a submatriz principal $\bar{A}[\{1, \dots, n-1\}]$ como em C . O grafo associado a \tilde{A} é 1-cordal com dois cliques maximais, tendo um desses cliques dois vértices. Pela demonstração do Lema 2.1, sabemos que \tilde{A} admite um N -completamento \tilde{A}_c cujos elementos nas posições $(1, n)$ e $(n, 1)$ são, respectivamente, $(-1)^n a_{1n}$ e $(-1)^n a_{n1}$. Logo, \tilde{A}_c é, também, um N -completamento de A . \square

Tendo em conta os resultados apresentados até este momento, podemos garantir a existência de N -completamentos para as N -matrizes parciais combinatorialmente simétricas cujos grafos das entradas prescritas são os chamados grafos-bloco.

Proposição 2.5. *Toda a N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo grafo das entradas prescritas é um grafo-bloco, admite N -completamentos.*

Demonstração. Primeiro, transformamos o grafo-bloco num grafo 1-cordal, aplicando o Teorema 2.3 a cada submatriz principal cujo grafo associado é um dos ciclos que aparece no grafo-bloco. De seguida, aplicamos o Teorema 2.1 à nova matriz parcial de forma a obter um N -completamento. \square

2.1.2 Matrizes parciais não combinatorialmente simétricas

Atendamos, nesta secção, ao estudo da existência de N -completamentos de N -matrizes parciais não combinatorialmente simétricas.

Começamos por centrar-nos nos digrafos acíclicos.

Teorema 2.4. *Toda a N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo das entradas especificadas é acíclico admite N -completamentos.*

Demonstração. Seja A uma N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo das entradas especificadas D_A é acíclico. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que os elementos diagonais são todos iguais a -1 .

Seja D a matriz diagonal $D = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, (-1)^{n+1})$. Facilmente se verifica que todas as entradas especificadas de $A' = DAD^{-1}$ são negativas. Note-se que o digrafo associado a A' é, também, D_A .

Consideremos, em $V(D_A)$, a relação de ordem parcial \prec induzida por D_A : $i \prec j$ se existe um caminho em D_A de i até j . O algoritmo de ordenação topológica permite-nos obter uma ordenação topológica dos vértices de D_A e, por conseguinte, também uma permutação P tal que todas as entradas especificadas da matriz parcial $\bar{A} = PA'P^T$ estão na parte triangular superior e na diagonal principal e são todas negativas.

Podemos admitir, sem perda de generalidade, que a parte triangular superior de \bar{A} e a diagonal principal são totalmente especificadas. De facto, podemos completar cada entrada não prescrita (i, j) , onde $i < j$, com um real negativo. Assim, \bar{A} é da forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ ? & -1 & -a_{23} & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ ? & ? & -1 & \dots & -a_{3n-1} & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ ? & ? & ? & \dots & ? & -1 \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} > 0$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e todo o $j \in \{2, \dots, n\}$ tais que $j > i$.

Mostremos que \bar{A} admite N -completamentos. Dado $x \in \mathbb{R}$, consideremos o completamento

$$\bar{A}_x = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ -x & -1 & -a_{23} & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ -x & -x & -1 & \dots & -a_{3n-1} & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x & -x & -x & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -x & -x & -x & \dots & -x & -1 \end{bmatrix}$$

de \bar{A} . O determinante de \bar{A}_x será, obviamente, um polinómio em x . Atendendo ao grafo de \bar{A}_x e ao peso de cada uma das suas arestas, podemos afirmar que

$(n, n-1), (n-1, n-2), \dots, (3, 2), (2, 1)$ é o caminho em que o peso de todas as arestas é $-x$ de maior comprimento. Seja $N = \{1, \dots, n\}$. Note-se que o caminho referido corresponde à permutação $\tau : N \longrightarrow N$ definida por

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix},$$

cujo sinal é $(-1)^{n-1}$. Denotando $\bar{A}_x = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, temos que

$$\det \bar{A}_x = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}.$$

Dado que

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n c_{i\tau(i)} &= (-1)^{n-1} (-a_{1n} (-x)^{n-1}) \\ &= -a_{1n} x^{n-1}, \end{aligned}$$

podemos concluir que $\det \bar{A}_x$ é um polinómio em x de grau $n-1$ cujo coeficiente director é $-a_{1n} < 0$. Portanto, existe $M_N \in \mathbb{R}$ tal que $\det \bar{A}_x < 0$, para todo o $x > M_N$.

Sejam $\alpha \subseteq N$ e $|\alpha| = k$. Se $k > 1$, sabemos que a submatriz principal $\bar{A}_x[\alpha]$ é da forma

$$\bar{A}_x[\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & -b_{12} & -b_{13} & \dots & -b_{1k-1} & -b_{1k} \\ -x & -1 & -b_{23} & \dots & -b_{2k-1} & -b_{2k} \\ -x & -x & -1 & \dots & -b_{3k-1} & -b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x & -x & -x & \dots & -1 & -b_{k-1k} \\ -x & -x & -x & \dots & -x & -1 \end{bmatrix},$$

sendo o seu determinante um polinómio em x de grau $k-1$ cujo coeficiente director é $-b_{1k} < 0$. Por conseguinte, existe $M_\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\det \bar{A}_x[\alpha] < 0$, para todo o $x > M_\alpha$.

Podemos, então, considerar o real $M = \max \{M_\alpha \mid \alpha \subseteq N, |\alpha| > 1\}$ e afirmar que $\det \bar{A}_x[\alpha] < 0$, para todo o $x > M$ e para qualquer $\alpha \subseteq N$. Assim, dado $x > M$, \bar{A}_x é um N -completamento de \bar{A} e, por conseguinte, A admite N -completamentos. \square

Dado que o digrafo das entradas especificadas de uma matriz parcial triangular superior é acíclico, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Corolário 2.2. *Toda a N -matriz parcial triangular superior, pertencente a \mathcal{PS}_n , admite N -completamentos.*

Dirigimos, agora, o nosso estudo para as matrizes parciais cujos digrafos associados são não acíclicos, considerando, mais concretamente, tipos de digrafos associados onde os ciclos têm um papel importante.

O caso do simples ciclo é resolvido com base no Teorema 2.3.

Proposição 2.6. *Seja A uma N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo das entradas especificadas é um ciclo. Então, existe um N -completamento A_c de A .*

Demonstração. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? & \dots & ? & ? \\ ? & -1 & 1 & \dots & ? & ? \\ ? & ? & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & 1 \\ (-1)^n a_{n1} & ? & ? & \dots & ? & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{n1} > 0$.

Consideremos a matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & ? & \dots & ? & ? & (-1)^n a_{1n} \\ a_{21} & -1 & 1 & \dots & ? & ? & ? \\ ? & a_{32} & -1 & \dots & ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & \dots & a_{n-1n-2} & -1 & 1 \\ (-1)^n a_{n1} & ? & ? & \dots & ? & a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{i+1i} > 1$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$, e $a_{1n} > a_{n1}^{-1}$. Facilmente se verifica que \bar{A} é uma N -matriz parcial combinatorialmente simétrica, cujo grafo das entradas prescritas é um ciclo. Pelo Teorema 2.3, podemos garantir a existência de um N -completamento A_c de \bar{A} e, por conseguinte, de A . \square

De modo análogo, obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.7. *Toda a N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo das entradas especificadas é um semiciclo, admite N -completamentos.*

Quando o digrafo associado à N -matriz parcial é um duplo ciclo com um vértice em comum, a Proposição 2.6 e o Teorema 2.1 permitem-nos garantir a existência do completamento desejado.

Proposição 2.8. *Seja A uma N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , tal que D_A é um duplo ciclo com um vértice em comum. Então, existe um N -completamento A_c de A .*

Demonstração. Basta completar cada submatriz principal associada a cada um dos ciclos usando a Proposição 2.6 e, de seguida, completar a matriz parcial obtida, cujo grafo associado é 1-cordal, usando o Teorema 2.1. \square

Podemos generalizar o resultado anterior para N -matrizes parciais cujo di-grafo associado é um duplo ciclo com um ou mais arcos em comum.

Lema 2.3. *Seja A uma N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_4 , cujo grafo é um duplo ciclo com um arco em comum. Então, A admite N -completamentos.*

Demonstração. Atendendo a que a classe das N -matrizes é invariante para as semelhanças diagonais e de permutação, apenas necessitamos considerar os dois seguintes casos:

(a) A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -x_{14} \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & -1 \\ -a_{41} & -x_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

onde todo o x_{ij} representa uma entrada não especificada, $a_{41} > 0$ e $a_{43} > 1$. Seja $c > 1$. Fixemos $x_{21} = c$ e $x_{42} = a_{41}$ e denotemos por A_1 a matriz parcial obtida. Aplicando a Proposição 2.2 à submatriz principal $A_1[\{2, 3, 4\}]$, obtemos um seu N -completamento

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -c_{24} \\ -c_{32} & -1 & -1 \\ -a_{41} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

com $c_{24}, c_{32} > 0$. Facilmente se verifica que a matriz resultante de A_1 por substituição de $A_1[\{2, 3, 4\}]$ por C e fixando $x_{13} = 1$, $x_{14} = c_{24}$ e $x_{31} = c_{32}$ é uma N -matriz. Obtemos, desta forma, um N -completamento de A_1 e, portanto, de A .

(b) A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -x_{14} \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} \\ -a_{31} & -x_{32} & -1 & -1 \\ -x_{41} & -a_{42} & -x_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

onde cada x_{ij} representa uma entrada não prescrita e $a_{31}, a_{42} > 0$.

Seja A_x o seguinte completamento

$$A_x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x & -x \\ -x & -1 & -1 & -x \\ -a_{31} & -x & -1 & -1 \\ -x & -a_{42} & -x & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Prova-se que $\det A_x[\alpha]$ é um polinómio em x de grau não superior a 4, cujo coeficiente director é negativo, para todo o $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Logo, existe $M > 0$ tal que $\det A_x[\alpha] < 0$ para todo o $x > M$ e para qualquer $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. \square

Este lema permite-nos obter o resultado que se segue.

Teorema 2.5. *Toda a N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo associado é um duplo ciclo com um arco em comum, admite N -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução em n . Se $n = 3$, A admite um N -completamento, uma vez que $A \in \mathcal{PS}_3$. O caso $n = 4$ é tratado no lema anterior. Admitamos que $n > 4$ e consideremos uma N -matriz parcial A pertencente a \mathcal{PS}_n cujo digrafo das entradas especificadas D_A é um duplo ciclo com um arco em comum. Por semelhanças de permutação e diagonais, podemos assumir que os ciclos são $\Gamma_1 : (1, 2), (2, 3), \dots, (k, k+1), (k+1, 1)$ e $\Gamma_2 : (k, k+1), (k+1, k+2), \dots, (n-1, n), (n, k)$, onde $k+1 \geq n-k+1$, e que a matriz A é da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -x_{1k} & -x_{1k+1} & -x_{1k+2} & \dots & -x_{1n} \\ -x_{21} & -1 & \dots & -x_{2k} & -x_{2k+1} & -x_{2k+2} & \dots & -x_{2n} \\ -x_{31} & -x_{32} & \dots & -x_{3k} & -x_{3k+1} & -x_{3k+2} & \dots & -x_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{k1} & -x_{k2} & \dots & -1 & -1 & -x_{kk+2} & \dots & -x_{kn} \\ -a_{k+11} & -x_{k+12} & \dots & -x_{k+1k} & -1 & -1 & \dots & -x_{k+1n} \\ -x_{k+21} & -x_{k+22} & \dots & -x_{k+2k} & -x_{k+2k+1} & -1 & \dots & -x_{k+2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{n1} & -x_{n2} & \dots & -a_{nk} & -x_{nk+1} & -x_{nk+2} & \dots & -1 \end{bmatrix},$$

onde todo o x_{ij} representa uma entrada não prescrita e $a_{k+11}, a_{nk} > 0$.

Por forma a obter o completamento desejado, consideremos $x_{k+12} = a_{k+11}$ e $x_{21} = c$ tal que $c > 1$. Seja A_1 a matriz parcial resultante. A submatriz principal $A_1[\{2, 3, \dots, n\}]$ é uma N -matriz parcial $(n-1) \times (n-1)$ cujo digrafo associado é um duplo ciclo com um arco em comum. Pela hipótese de

indução, sabemos que existe um seu N -completamento $C = (-c_{ij})_{i,j=2}^n$, em que $c_{ij} > 0$, para quaisquer i, j . Consideremos, então, o completamento A_c de A obtido substituindo a submatriz principal $A[\{2, 3, \dots, n\}]$ por C e fixando

$$\begin{aligned} x_{1j} &= c_{2j}, & j &= 3, 4, \dots, n \\ x_{i1} &= c_{i2}, & i &= 3, 4, \dots, n, \quad i \neq k+1. \end{aligned}$$

Atendendo à demonstração do Lema 2.1, A_c é uma N -matriz. \square

Analisemos, agora, o problema de completamento para N -matrizes parciais cujos digrafos associados são duplos ciclos com h arcos em comum, $h > 1$.

Começamos por considerar o seguinte caso particular.

Lema 2.4. *Seja A uma N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_{h+2} , cujo digrafo das entradas especificadas é um duplo ciclo com h arcos em comum. Então, existe um N -completamento A_c de A .*

Demonstração. A demonstração segue por indução em h .

Se $h = 2$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a matriz A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & -x_{14} \\ -x_{21} & -1 & -1 & -x_{24} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & -1 \\ -a_{41} & -a_{42} & -x_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

representando cada x_{ij} uma entrada não especificada e sendo a_{41}, a_{42} reais positivos.

Consideremos o completamento

$$A_x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x & -x \\ -x & -1 & -1 & -x \\ -x & -x & -1 & -1 \\ -a_{41} & -a_{42} & -x & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Para cada $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, $\det A_x[\alpha]$ é um polinómio em x de grau não superior a 4 com coeficiente director negativo. Assim, existe $M > 0$ tal que $\det A_x[\alpha] < 0$ para todo o $x > M$ e para todo o $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

Admitamos agora que o resultado é válido para $h - 1$ e mostremos a sua validade para h .

Por semelhanças diagonais e de permutação, podemos assumir, sem perda de

generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x_{13} & \dots & -x_{1h} & -x_{1h+1} & -x_{1h+2} \\ -x_{21} & -1 & -1 & \dots & -x_{2h} & -x_{2h+1} & -x_{2h+2} \\ -x_{31} & -x_{32} & -1 & \dots & -x_{3h} & -x_{3h+1} & -x_{3h+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_{h1} & -x_{h2} & -x_{h3} & \dots & -1 & -1 & -x_{hh+2} \\ -x_{h+11} & -x_{h+12} & -x_{h+13} & \dots & -x_{h+1h} & -1 & -1 \\ -a_{h+21} & -a_{h+22} & -x_{h+23} & \dots & -x_{h+2h} & -x_{h+2h+1} & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{h+21}, a_{h+22} > 0$ e onde todo o x_{ij} representa uma entrada não conhecida.

Sejam $x_{h+2h+1} = c$, com $c > 1$, $x_{h+11} = a_{h+21}$ e $x_{h+12} = a_{h+22}$. Denotamos por A_1 a matriz parcial obtida com estas escolhas.

Aplicando a hipótese de indução à submatriz principal $A_1[\{1, 2, \dots, h+1\}]$, obtemos um seu N -completamento $C = (-c_{ij})_{i,j=1}^{h+1}$, onde todo o c_{ij} é positivo.

O completamento desejado A_c de A é obtido substituindo a submatriz principal $A[\{1, 2, \dots, h+1\}]$ por C e fixando

$$\begin{aligned} x_{h+2j} &= c_{h+1j}, & j &= 3, 4, \dots, h \\ x_{ih+2} &= c_{ih+1} & i &= 1, 2, \dots, h. \end{aligned}$$

Uma vez mais pela demonstração do Lema 2.1, segue-se que A_c é, de facto, uma N -matriz. \square

Podemos generalizar o resultado anterior do seguinte modo.

Teorema 2.6. *Toda a N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo associado é um duplo ciclo com h arcos em comum, $h \geq 2, n \geq h+2$, admite N -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução em n .

O caso em que $n = h+2$ é tratado no lema anterior.

Consideremos $n > h+2$ e admitamos que o resultado é válido para $n-1$.

Seja A uma N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo das entradas prescritas é um duplo ciclo com h arcos em comum.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que os ciclos são

$$\Gamma_1 : (1, 2), (2, 3), \dots, (k, k+1), \dots, (k+h-1, k+h), (k+h, 1)$$

e

$$\Gamma_2 : (k, k+1), \dots, (k+h-1, k+h), (k+h, k+h+1), \dots, (n-1, n), (n, k)$$

e que a matriz parcial é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -x_{1k} & \dots & -x_{1n} \\ -x_{21} & -1 & \dots & -x_{2k} & \dots & -x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -x_{k1} & -x_{k2} & \dots & -1 & \dots & -x_{kn} \\ -x_{k+11} & -x_{k+12} & \dots & -x_{k+1k} & \dots & -x_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{k+h1} & -x_{k+h2} & \dots & -x_{k+hk} & \dots & -x_{k+hn} \\ -x_{k+h+11} & -x_{k+h+12} & \dots & -x_{k+h+1k} & \dots & -x_{k+h+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -x_{n1} & -x_{n2} & \dots & -a_{nk} & \dots & -1 \end{bmatrix},$$

sendo todas as entradas da diagonal superior especificadas e iguais a -1 e representando x_{ij} uma entrada não especificada na posição (i, j) . Além disso, a_{k+h1} e a_{nk} são reais positivos.

Dado $c > 1$, fixemos $x_{21} = c$ e $x_{k+h2} = a_{k+h1}$. Denotamos por A_1 a nova matriz parcial. A submatriz principal $A_1[\{2, \dots, n\}]$ é uma N -matriz parcial de ordem $(n-1)$ cujo digrafo associado é um duplo ciclo com h arcos em comum. Pela hipótese de indução, podemos concluir que existe um seu N -complemento $C = (-c_{ij})_{i,j=2}^n$, onde $c_{ij} > 0$, para todo o i e todo o j . Consideremos, então, o complemento A_c de A obtido substituindo a submatriz principal $A[\{2, \dots, n\}]$ por C e escolhendo

$$\begin{aligned} x_{i1} &= c_{i2}, & i &= 3, 4, \dots, n, & i &\neq k+h \\ x_{1j} &= c_{2j} & j &= 3, 4, \dots, n. \end{aligned}$$

A demonstração do Lema 2.1 permite-nos afirmar que A_c é uma N -matriz. \square

Apresentamos, agora, uma generalização destes resultados obtidos para duplos ciclos.

Teorema 2.7. *Toda a N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo grafo dirigido das entradas especificadas é um bloco-ciclo, admite N -complementos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução no número k de ciclos no bloco-ciclo. Para $k = 2$, basta atender aos resultados anteriormente apresentados para duplos ciclos com um vértice ou h arcos em comum.

Admitamos, agora, que o resultado é válido para blocos-ciclos com menos de k ciclos.

Seja A uma N -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , cujo digrafo associado é um bloco-ciclo com k ciclos $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$.

Se existe um ciclo Γ_i tal que Γ_i tem exactamente um vértice em comum com Γ_{i+1} , então podemos completar as submatrizes principais associadas aos blocos-ciclos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_i$ e $\Gamma_{i+1}, \dots, \Gamma_k$ por forma a obter N -matrizes, aplicando a hipótese de indução, e o grafo das entradas especificadas da N -matriz parcial resultante é 1-cordal. Logo, A admite N -completamentos (pelo Teorema 2.1).

Suponhamos, então, que cada ciclo $\Gamma_{i-1}, \Gamma_{i+1}$ tem pelo menos um arco em comum com Γ_i , $i = 2, \dots, k-1$. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que Γ_1 e Γ_2 têm $p \geq 1$ arcos em comum, que Γ_1 é o ciclo

$$\Gamma_1 : (1, 2), (2, 3), \dots, (q_1, q_1 + 1), \dots, (q_1 + p - 1, q_1 + p), (q_1 + p, 1)$$

e que Γ_2 é o ciclo

$$\Gamma_2 : (q_1, q_1 + 1), \dots, (q_1 + p - 1, q_1 + p), (q_1 + p, q_1 + p + 1), \dots, (q_1 + q_2, q_1).$$

Dado que o digrafo associado à N -matriz parcial $B = A[\{1, 2, \dots, q_1 + p\}]$ é um ciclo, existe um N -completamento $B_c = (-b_{ij})_{i,j=1}^{q_1+p}$ de B , com todo o b_{ij} positivo. Seja A_1 a N -matriz parcial obtida de A por substituição de B por B_c e especificando a entrada $(q_1 + q_2, q_1 + p)$ com $-a_{q_1+q_2, q_1}/b_{q_1+p, q_1}$ e passando a posição $(q_1 + q_2, q_1)$ para não prescrita.

A matriz parcial $C = A_1[\{q_1 + p, q_1 + p + 1, \dots, n\}]$ é uma N -matriz parcial cujo digrafo associado é um bloco-ciclo com $k-1$ ciclos. Aplicando a hipótese de indução, obtemos um N -completamento C_c de C .

Seja A_2 a N -matriz parcial obtida de A_1 substituindo C por C_c . Dado que o grafo das entradas especificadas de A_2 é um grafo 1-cordal, existe um N -completamento A_c de A_2 cujo elemento na posição $(q_1 + q_2, q_1)$ é $-a_{q_1+q_2, q_1}$. Note-se que A_c é, também, um completamento de A . \square

O seguinte resultado diz respeito a outro tipo de N -matrizes parciais que admitem N -completamentos.

Proposição 2.9. *Seja A uma N -matriz parcial, pertencente a \mathcal{PS}_n , que admite uma partição do tipo*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & X_{13} & \dots & X_{1p-1} & X_{1p} \\ X_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & X_{2p-1} & X_{2p} \\ X_{31} & X_{32} & A_{33} & \dots & X_{3p-1} & X_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ X_{p-11} & X_{p-12} & X_{p-13} & \dots & A_{p-1p-1} & A_{p-1p} \\ X_{p1} & X_{p2} & X_{p3} & \dots & X_{pp-1} & A_{pp} \end{bmatrix},$$

onde cada bloco diagonal A_{ii} é uma N -matriz parcial $n_i \times n_i$ que admite N -completamentos, cada bloco A_{ii+1} tem exactamente uma entrada especificada

e cada X_{ij} é totalmente não especificado. Então, existe um N -completamento A_c de A .

Demonstração. Seja \tilde{A} a N -matriz parcial obtida a partir de A substituindo cada bloco diagonal A_{ii} por um seu N -completamento A_{ii_c} . Sem perda de generalidade, podemos assumir que todas as entradas especificadas de \tilde{A} são negativas. Se a entrada (i, j) é especificada, denotamos por $-a_{ij}$ o elemento nessa posição, sendo $a_{ij} > 0$. Por multiplicação diagonal positiva, podemos ainda assumir que todas as entradas diagonais são iguais a -1 .

A demonstração segue por indução no número p de blocos diagonais.

Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que $p = 2$.

Seja (i, j) a entrada especificada de A_{12} . Seja \bar{A} a N -matriz parcial de ordem n tal que $\bar{A}[\{1, \dots, n_1\}] = A_{11_c}$, $\bar{A}[\{n_1 + 1, \dots, n\}] = A_{22_c}$, os elementos nas posições $(n_1, n_1 + 1)$ e $(n_1 + 1, n_1)$ são, respectivamente, $-a_{ij}/a_{in_1}a_{n_1+1j}$ e $-c$, com $c > a_{in_1}a_{n_1+1j}/a_{ij}$, e todas as restantes entradas são não especificadas.

Observe-se que o grafo dirigido associado a \bar{A} é 1-cordal, com 3 cliques maximais. Aplicando a Proposição 2.4 à submatriz principal $C = \bar{A}[\{n_1, \dots, n\}]$, obtemos um N -completamento C_c de C , cujo elemento na posição (n_1, j) é $-a_{ij}/a_{in_1}$.

Seja \hat{A} a N -matriz parcial obtida de \bar{A} completando C como C_c . Aplicando uma vez mais a Proposição 2.4, obtemos um N -completamento A_c de \hat{A} , cujo elemento na posição (i, j) é $-a_{ij}$.

Assim, A_c é também um N -completamento de A .

Admitamos, agora, que o resultado é válido para $p - 1$ blocos diagonais e mostremos a sua validade para p blocos diagonais.

Começamos por completar a submatriz $C = \tilde{A}[\{1, \dots, n_1 + n_2\}]$ de \tilde{A} de modo a obter uma N -matriz C_c , seguindo o procedimento descrito para o caso $p = 2$. Seja \bar{A} a N -matriz parcial obtida de \tilde{A} substituindo C por C_c . \bar{A} é uma N -matriz parcial que admite a partição

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} C_c & \bar{A}_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1p-1} \\ Y_{21} & A_{33_c} & \bar{A}_{23} & \dots & Y_{2p-1} \\ Y_{31} & Y_{32} & A_{44_c} & \dots & Y_{3p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{p-11} & Y_{p-12} & Y_{p-13} & \dots & A_{pp_c} \end{bmatrix},$$

onde cada bloco diagonal é uma N -matriz, cada bloco \bar{A}_{ii+1} tem exactamente uma entrada prescrita e cada Y_{ij} é totalmente não especificado. Note-se que temos $p - 1$ blocos diagonais. Assim, pela hipótese de indução, existe um N -completamento A_c de \bar{A} e, consequentemente, de A . \square

Concluimos esta secção com o seguinte problema em aberto que generaliza o resultado apresentado na última proposição.

Seja A uma N -matriz parcial $n \times n$ tal que toda a submatriz principal irredutível admite um N -completamento. Existe algum N -completamento de A ?

Desconhecemos, ainda, uma resposta para esta questão geral. Podemos, no entanto, encontrar uma resposta afirmativa para o caso das matrizes parciais 3×3 na Proposição 2.2.

2.1.3 Sob condições de simetria

Analisamos, nesta secção, o problema de completamento de N -matrizes impondo uma condição de simetria: pretendemos determinar quais as matrizes parciais que admitem um completamento que seja uma N -matriz simétrica.

Antes de começarmos o estudo deste problema de completamento de matrizes, relembremos que a classe das N -matrizes simétricas não é invariante para a multiplicação diagonal positiva à esquerda ou à direita. No entanto, é invariante para a congruência diagonal e para as semelhanças de permutação. A caracterização de N -matrizes simétricas apresentada no capítulo anterior é também fundamental para o estudo do problema de completamento em questão. Recordemos que, dada uma matriz simétrica A com entradas diagonais negativas, A é uma N -matriz simétrica se e somente se os seus menores principais descendentes são negativos. A verificação se um certo completamento de uma matriz parcial é ou não uma N -matriz simétrica fica, assim, simplificada. Além destes factos, sabemos que todas as submatrizes principais de uma N -matriz simétrica são, ainda, N -matrizes simétricas.

Obviamente, para que uma matriz parcial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ admita, como completamento, uma N -matriz simétrica, A terá de ser uma N -matriz parcial e, além disso, sempre que as entradas (i, j) e (j, i) sejam ambas especificadas, os elementos a_{ij} e a_{ji} terão de ser iguais. Definimos, então, as N -matrizes simétricas parciais.

Definição 2.2. *Uma matriz parcial quadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ diz-se uma N -matriz simétrica parcial se todas as suas submatrizes principais totalmente especificadas são N -matrizes e se a entrada (i, j) é especificada se e apenas se a entrada (j, i) é especificada e $a_{ij} = a_{ji}$.*

No problema de completamento de matrizes anteriormente considerado, o facto de a classe das N -matrizes ser invariante para a multiplicação diagonal positiva permitia-nos assumir, sem perda de generalidade, que os elementos da

diagonal principal eram todos iguais a -1 . Considerando a classe mais restrita das N -matrizes simétricas e este conceito traduzido para o contexto das matrizes parciais, facilmente se conclui que dadas uma N -matriz simétrica parcial A e uma matriz diagonal positiva D , de igual ordem, DA e AD não são necessariamente N -matrizes simétricas parciais. Podemos, no entanto, contornar esta questão, pensando na congruência diagonal, uma vez que se $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma N -matriz simétrica parcial com os elementos da diagonal principal todos especificados e D é a matriz diagonal $D = \text{diag}((|a_{11}|)^{1/2}, (|a_{22}|)^{1/2}, \dots, (|a_{nn}|)^{1/2})$, então os elementos da diagonal principal de DAD são todos iguais a -1 . Além disso, DAD é, também uma N -matriz simétrica parcial com $\Gamma_{DAD} = \Gamma_A$. Podemos, pois assumir que todos os elementos da diagonal principal de uma qualquer N -matriz simétrica parcial são iguais a -1 , uma vez que consideramos este problema de completamento apenas para matrizes parciais com a diagonal principal totalmente prescrita.

Dirigimos, agora, o nosso estudo para o problema de completamento de N -matrizes sob as condições de simetria referidas.

Pretendemos determinar quais as N -matrizes simétricas parciais que admitem uma N -matriz simétrica como completamento. Chamamos *N -completamento simétrico* a um tal completamento.

Note-se que a própria definição de N -matriz simétrica parcial nos garante a simetria de sinal necessária para a existência de um N -completamento. Além disso, dado que assumimos a especificação de todas as entradas diagonais, não existem entradas prescritas nulas. No entanto, tal como para o problema de completamento de N -matrizes, teremos de exigir a pertença, a menos de semelhança diagonal admissível, a \mathcal{PS}_n .

Tendo em conta que toda a N -matriz simétrica parcial 3×3 é combinatorialmente simétrica, podemos garantir sempre a existência de N -completamentos simétricos de N -matrizes simétricas parciais dessa ordem.

Analogamente ao que acontece no problema de completamento de N -matrizes, este problema não se reduz ao problema de completamento de N -matrizes simétricas parciais em \mathcal{PS}_n com a diagonal especificada, como podemos comprovar com o seguinte exemplo.

Exemplo 2.8. Consideremos a N -matriz simétrica parcial

$$A = \begin{bmatrix} ? & 0,01 & -8 \\ 0,01 & -1 & 5 \\ -8 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

pertencente a \mathcal{PS}_3 . A N -matriz simétrica parcial definida pelas entradas diagonais especificadas de A admite N -completamentos simétricos. No entanto, qualquer completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} c & 0,01 & -8 \\ 0,01 & -1 & 5 \\ -8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

de A não é uma N -matriz. Com efeito, c teria de ser negativo, mas, nesse caso, $\det A_c = -24c + 63,2001 > 0$.

Resolvemos, de seguida, o problema de completamento de matrizes em questão para o caso dos grafos cordais. Começamos por considerar o caso p -cordal com dois cliques maximais.

Proposição 2.10. *Seja A uma N -matriz simétrica parcial tal que G_A é p -cordal com dois cliques maximais. Então, A admite N -completamentos simétricos.*

Demonstração. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que A admite uma partição da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & X \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ Y & A_{23}^T & A_{33} \end{bmatrix},$$

onde as entradas não especificadas são exactamente as de X e Y , todas as submatrizes principais totalmente especificadas são N -matrizes simétricas e A_{ii} é uma matriz do tipo $n_i \times n_i$, $i = 1, 2, 3$, sendo $n_2 = p$. Note-se que A_{22} é uma matriz invertível. Podemos, assim, considerar o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12}A_{22}^{-1}A_{23} \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ A_{23}^TA_{22}^{-1}A_{12}^T & A_{23}^T & A_{33} \end{bmatrix}$$

de A . Facilmente se verifica que

$$\det A_c = \frac{\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23}^T & A_{33} \end{bmatrix}}{\det A_{22}},$$

pelo que $\det A_c < 0$.

Pretendemos mostrar que A_c é uma N -matriz simétrica. Atendendo ao Teorema 1.2, resta-nos, pois, provar que $\det A_c[\{1, \dots, k\}] < 0$, para todo o $k \in \{n_1 + n_2 + 1, \dots, n - 1\}$. Observe-se que, dado $k \in \{n_1 + n_2 + 1, \dots, n - 1\}$,

$$A_c[\{1, \dots, k\}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12}A_{22}^{-1}\bar{A}_{23} \\ A_{12}^T & A_{22} & A_{23} \\ \bar{A}_{23}^TA_{22}^{-1}A_{12}^T & \bar{A}_{23}^T & \bar{A}_{33} \end{bmatrix},$$

onde \bar{A}_{23} é a matriz $A_{23} [\{n_1 + 1, \dots, n_2\} | \{n_1 + n_2 + 1, \dots, k\}]$ e \bar{A}_{33} a matriz $A_{33} [\{n_1 + n_2 + 1, \dots, k\}]$. Prova-se que

$$\det A_c [\{1, \dots, k\}] = \frac{\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} A_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{23}^T & \bar{A}_{33} \end{bmatrix}}{\det A_{22}} < 0,$$

o que completa a demonstração. \square

Com base na proposição anterior, mostramos o resultado mais geral.

Teorema 2.8. *Seja G um grafo cordal conexo. Então, qualquer N -matriz simétrica parcial cujo grafo associado é G admite N -completamentos simétricos.*

Demonstração. Sabemos que G é p -cordal, para algum p . A demonstração segue por indução no número k de cliques maximais em G . O caso $k = 2$ está resolvido na Proposição 2.10. Admitamos que o resultado é válido para qualquer grafo cordal conexo com $k - 1$ cliques maximais. Seja G_1 o subgrafo dado pela soma de dois cliques maximais. Aplicando a Proposição 2.10 à submatriz principal A_1 de A cujo grafo associado é G_1 , obtemos um N -completamento simétrico A_{1c} de A_1 . Substituindo, em A , a submatriz principal A_1 pelo seu completamento A_{1c} , obtemos uma N -matriz simétrica parcial, cujo grafo das entradas especificadas é cordal, com $k - 1$ cliques maximais. A hipótese de indução garante a existência do completamento de A desejado. \square

Seja A uma N -matriz simétrica parcial, cujo grafo das entradas especificadas é um grafo não conexo G . No teorema que apresentamos de seguida, provamos que se cada submatriz principal de A associada a cada componente conexa de G admite N -completamentos simétricos, então também A admite tais tipos de completamentos.

Teorema 2.9. *Se uma N -matriz simétrica parcial A é semelhante por permutação a uma matriz parcial diagonal por blocos em que cada bloco diagonal admite N -completamentos simétricos, então existe um N -completamento simétrico de A .*

A demonstração deste último resultado é semelhante à do Teorema 2.2. De facto, podemos adaptar, sem qualquer dificuldade, a demonstração desse teorema de forma a obtermos apenas N -matrizes simétricas parciais.

Encerrado o problema de completamento de N -matrizes simétricas para o caso dos grafos cordais, a questão que surge naturalmente diz respeito ao completamento de ciclos.

Como veremos de seguida, uma N -matriz simétrica parcial, cujo grafo associado é um ciclo, não admite, em geral, um N -completamento. Procuraremos, então, determinar condições necessárias e suficientes para a existência de N -completamentos simétricos de N -matrizes simétricas parciais desse tipo.

Exemplo 2.9. Consideremos a N -matriz simétrica parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1,1 & ? & -5 \\ -1,1 & -1 & -1,1 & ? \\ ? & -1,1 & -1 & -1,1 \\ -5 & ? & -1,1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que A é diagonalmente semelhante, por semelhança diagonal admissível, a uma N -matriz simétrica parcial pertencente a \mathcal{PS}_4 .

Dados dois reais a, b , consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -1,1 & a & -5 \\ -1,1 & -1 & -1,1 & b \\ a & -1,1 & -1 & -1,1 \\ -5 & b & -1,1 & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Temos que

$$\det A_c [\{2, 3, 4\}] < 0 \iff -1,42 < b < -1$$

e

$$\det A_c [\{1, 2, 4\}] < 0 \iff -5,5 - \sqrt{5,04} < b < -5,5 + \sqrt{5,04} \approx -3,255.$$

Logo, não existe nenhum completamento de A que seja uma N -matriz simétrica.

No lema que se segue, apresentamos condições necessárias e suficientes para que uma N -matriz simétrica parcial, semelhante por semelhança diagonal admissível a uma matriz em \mathcal{PS}_4 , cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo de comprimento 4, admita N -completamentos simétricos.

Lema 2.5. *Seja A a seguinte N -matriz simétrica parcial*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & -a_{14} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & -a_{34} \\ -a_{14} & ? & -a_{34} & -1 \end{bmatrix},$$

onde $a_{12}, a_{14}, a_{23}, a_{34} > 1$. Então, existe um N -completamento simétrico A_c de A se e somente se

$$|a_{12}a_{23} - a_{34}a_{14}| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)} + \sqrt{(a_{34}^2 - 1)(a_{14}^2 - 1)}.$$

Demonstração. Sabemos, pelo Teorema 2.8, que A admite um N -complementamento simétrico se e só se existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$A_x = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -x & -a_{14} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & ? \\ -x & -a_{23} & -1 & -a_{34} \\ -a_{14} & ? & -a_{34} & -1 \end{bmatrix}$$

é uma N -matriz simétrica parcial. Com efeito, o grafo associado a A_x é um grafo 2-cordal.

Logo, A admite N -complementamentos simétricos se e somente se existe x tal que $\det A_x [\{1, 2, 3\}] < 0$ e $\det A_x [\{1, 3, 4\}] < 0$, ou seja, se e só se existe x tal que

$$|x - a_{12}a_{23}| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)} \quad (2.1)$$

e

$$|x - a_{34}a_{14}| < \sqrt{(a_{34}^2 - 1)(a_{14}^2 - 1)}. \quad (2.2)$$

Uma simples manipulação destas inequações permite-nos mostrar que existe x que verifica (2.1) e (2.2) se e só se

$$|a_{12}a_{23} - a_{34}a_{14}| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)} + \sqrt{(a_{34}^2 - 1)(a_{14}^2 - 1)}.$$

□

O resultado anterior pode ser generalizado para $n > 4$, como ilustram as seguintes proposições.

Proposição 2.11. *Seja A a seguinte N -matriz simétrica parcial $n \times n$, com $n = 2p$,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{1n} & ? & ? & \dots & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix},$$

onde todo o a_{ij} é maior que 1. Então, existe um N -complementamento simétrico de A se e somente se o sistema de inequações

$$|a_{12}a_{23} - x_0a_{1n}| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)} + \sqrt{(x_0^2 - 1)(a_{1n}^2 - 1)},$$

$$|a_{pp+1}a_{p+1p+2} - a_{p+2p+3}x_{p-3}| < \sqrt{(a_{pp+1}^2 - 1)(a_{p+1p+2}^2 - 1)} + \sqrt{(a_{p+2p+3}^2 - 1)(x_{p-3}^2 - 1)},$$

$$|a_{k+3k+4}x_{k+1}-a_{n-1-kn-k}x_k| < \sqrt{(a_{k+3k+4}^2-1)(x_{k+1}^2-1)} + \sqrt{(a_{n-1-kn-k}^2-1)(x_k^2-1)},$$

$$k = 0, \dots, p-4 \quad (\text{se } p \geq 4),$$

nas variáveis x_0, x_1, \dots, x_{p-3} , tem solução.

Demonstração. Dado um $(p-2)$ -uplo de reais positivos $x = (x_0, \dots, x_{p-3})$, consideremos a matriz parcial A_x obtida de A completando as entradas $(k+3, n-k), (n-k, k+3)$ com $-x_k$, $k = 0, \dots, p-3$. Pelo Teorema 2.8, sabemos que A admite um N -completamento simétrico se e somente se existe x tal que as submatrizes principais $A_x[\{1, 2, 3, n\}]$, $A_x[\{p, p+1, p+2, p+3\}]$, $A_x[\{k+3, k+4, n-1-k, n-k\}]$ ($k = 0, \dots, p-4$) de A_x admitem N -matrizes simétricas como completamentos. Note-se que o grafo associado a cada uma destas submatrizes principais é um ciclo de comprimento 4. Logo, aplicando o lema anterior, podemos afirmar que A admite N -completamentos simétricos se e só se o sistema referido tem solução. \square

Proposição 2.12. *Seja A a N -matriz simétrica parcial $n \times n$, com $n = 2p+1$,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{1n} & ? & ? & \dots & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix},$$

onde $a_{ii+1}, a_{1n} > 1$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Então, existe um N -completamento simétrico de A se e só se o sistema de inequações

$$|x_0 - a_{12}a_{1n}| < \sqrt{(a_{12}^2-1)(a_{1n}^2-1)},$$

$$|a_{pp+1}a_{p+1p+2}-a_{p+2p+3}x_{p-2}| < \sqrt{(a_{pp+1}^2-1)(a_{p+1p+2}^2-1)} + \sqrt{(a_{p+2p+3}^2-1)(x_{p-2}^2-1)},$$

$$|a_{k+2k+3}x_{k+1}-a_{n-1-kn-k}x_k| < \sqrt{(a_{k+2k+3}^2-1)(x_{k+1}^2-1)} + \sqrt{(a_{n-1-kn-k}^2-1)(x_k^2-1)},$$

$$k = 0, \dots, p-3 \quad (\text{se } p \geq 3),$$

nas variáveis x_0, x_1, \dots, x_{p-2} , tem solução.

Demonstração. Consideremos um $(p-1)$ -uplo $x = (x_0, \dots, x_{p-2})$ de reais positivos. Seja A_x a matriz parcial obtida de A especificando as entradas $(k+2, n-k), (n-k, k+2)$ com $-x_k$, $k = 0, \dots, p-2$. Pelo Teorema 2.8, segue-se que A admite N -completamentos simétricos se e só se existe x tal que as submatrizes $A_x[\{1, 2, n\}]$, $A_x[\{p, p+1, p+2, p+3\}]$, $A_x[\{k+2, k+3, n-1-k, n-k\}]$

($k = 0, \dots, p-3$) de A_x admitem N -matrizes simétricas como complementamentos. Observe-se que o grafo associado a $A_x[\{1, 2, n\}]$ é completo e que os grafos das entradas especificadas das restantes submatrizes principais listadas são ciclos de comprimento 4. Aplicando o lema anterior, A admite um N -complementamento simétrico se e só se o sistema referido tem solução. \square

É óbvio que analisar se as condições necessárias e suficientes apresentadas nas proposições anteriores se verificam para uma determinada N -matriz simétrica parcial $n \times n$, cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo de comprimento n , pode ser uma tarefa morosa para valores elevados de n . As condições suficientes que apresentamos de seguida são de verificação mais rápida.

Lema 2.6. *Seja A a seguinte N -matriz simétrica parcial*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{1n} & ? & ? & \dots & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix},$$

onde todo o a_{ij} é superior a 1. Se

$$\left| a_{n-2n-1}a_{n-1n} - a_{1n}(a_{12} \dots a_{n-3n-2})^{-1} \right| < \sqrt{(a_{n-2n-1}^2 - 1)(a_{n-1n}^2 - 1)}$$

ou

$$\left| a_{12}a_{23} - a_{1n}(a_{34} \dots a_{n-1n})^{-1} \right| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)},$$

então existe um N -complementamento de A .

Demonstração. A demonstração segue por indução em n .

Começemos por analisar o caso $n = 4$.

Se

$$|a_{23}a_{34} - a_{14}a_{12}^{-1}| < \sqrt{(a_{23}^2 - 1)(a_{34}^2 - 1)},$$

consideremos a matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & -a_{14} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & -a_{14}a_{12}^{-1} \\ ? & -a_{23} & -1 & -a_{34} \\ -a_{14} & -a_{14}a_{12}^{-1} & -a_{34} & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo ao Teorema 1.2 e à Proposição 2.10, é suficiente mostrar que o menor principal $\det \bar{A}[\{2, 3, 4\}]$ é negativo de modo a garantirmos a existência de um

N -completamento simétrico de \bar{A} , e, por conseguinte, de A . Facilmente se verifica que $\det \bar{A}[\{2, 3, 4\}] < 0$ se e só se

$$|a_{23}a_{34} - a_{14}a_{12}^{-1}| < \sqrt{(a_{23}^2 - 1)(a_{34}^2 - 1)}.$$

Se

$$|a_{12}a_{23} - a_{14}a_{34}^{-1}| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)},$$

consideremos a matriz parcial

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{14}a_{34}^{-1} & -a_{14} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & ? \\ -a_{14}a_{34}^{-1} & -a_{23} & -1 & -a_{34} \\ -a_{14} & ? & -a_{34} & -1 \end{bmatrix}.$$

Prova-se que \tilde{A} e, consequentemente, A admitem N -completamentos simétricos sempre que

$$|a_{12}a_{23} - a_{14}a_{34}^{-1}| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)},$$

seguindo um raciocínio análogo ao apresentado para o caso anterior.

Admitamos, agora, a validade do resultado para $n - 1$.

Se

$$|a_{n-2n-1}a_{n-1n} - a_{1n}(a_{12} \dots a_{n-3n-2})^{-1}| < \sqrt{(a_{n-2n-1}^2 - 1)(a_{n-1n}^2 - 1)},$$

temos que

$$a_{1n}a_{12}^{-1} > a_{23} \dots a_{n-3n-2}(a_{n-2n-1}a_{n-1n} - \sqrt{(a_{n-2n-1}^2 - 1)(a_{n-1n}^2 - 1)}).$$

Dado que $a_{23} \dots a_{n-3n-2} > 1$ e

$$a_{n-2n-1}a_{n-1n} - \sqrt{(a_{n-2n-1}^2 - 1)(a_{n-1n}^2 - 1)} \geq 1,$$

podemos concluir que a seguinte matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & -a_{1n}a_{12}^{-1} \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{1n} & -a_{1n}a_{12}^{-1} & ? & \dots & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix}$$

é uma N -matriz simétrica parcial. Observe-se que $C = \bar{A}[\{2, \dots, n\}]$ é uma N -matriz simétrica parcial, cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo.

Pela hipótese de indução, existe um N -completamento simétrico C_c de C . Seja $\bar{\bar{A}}$ a N -matriz simétrica parcial obtida de \bar{A} completando C como em C_c . A Proposição 2.10 permite-nos afirmar que $\bar{\bar{A}}$ e, conseqüentemente, A admitem N -completamentos simétricos.

Se

$$|a_{12}a_{23} - a_{1n}(a_{34} \dots a_{n-1n})^{-1}| < \sqrt{(a_{12}^2 - 1)(a_{23}^2 - 1)},$$

consideremos a matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & -a_{1n}a_{n-1n}^{-1} & -a_{1n} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1n}a_{n-1n}^{-1} & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{1n} & ? & ? & \dots & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix}.$$

Seguindo um raciocínio análogo ao do caso anterior, concluímos a demonstração. \square

As condições apresentadas acima não são, em geral, condições necessárias, como podemos comprovar no exemplo que se segue.

Exemplo 2.10. A N -matriz simétrica parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1,1 & ? & -2 \\ -1,1 & -1 & -1,1 & ? \\ ? & -1,1 & -1 & -1,1 \\ -2 & ? & -1,1 & -1 \end{bmatrix}$$

não satisfaz as condições do Lema 2.6. No entanto, especificando as entradas $(1,3), (3,1)$ com $-1,414938$ e as entradas $(2,4), (4,2)$ com $-1,41$, obtemos um N -completamento simétrico de A .

2.2 N_k -matrizes parciais

Voltamos, nesta secção, à classe mais abrangente - às N_k -matrizes. Consideramos, então, um inteiro positivo k e todas as matrizes cujos menores principais correspondentes às submatrizes principais de ordem inferior ou igual a k são negativos.

Claramente, estamos a exigir menos condições a nível do sinal dos menores principais da matriz dada, pelo que, pensando no problema de completamento associado a esta classe de matrizes, vamos obter mais alguns resultados para além dos facilmente generalizáveis da secção anterior.

Relembremos, antes de mais, que esta classe de matrizes é invariante para a multiplicação diagonal à esquerda ou à direita e para as semelhanças diagonais e de permutação.

Começamos, então, por definir as matrizes parciais de interesse para este problema, tendo em conta que toda a submatriz principal de uma N_k -matriz é, também, uma N_k -matriz.

Definição 2.3. *Uma matriz parcial quadrada A diz-se uma N_k -matriz parcial se todas as suas submatrizes principais totalmente especificadas são N_k -matrizes.*

Para que exista um completamento de uma dada matriz parcial que seja uma N_k -matriz é obviamente necessário que essa matriz parcial seja uma N_k -matriz parcial.

Designaremos por N_k -completamento de A qualquer completamento de uma matriz parcial A que seja uma N_k -matriz.

Centraremos, então, o nosso estudo no problema de completamento de N_k -matrizes parciais: pretendemos determinar quais as N_k -matrizes parciais que admitem N_k -completamentos.

Assumimos que todos os elementos da diagonal principal são especificados. Assim, sempre que $k > 1$, toda a N_k -matriz parcial considerada é sinal-simétrica.

Para valores pequenos de k , os problemas de completamento de N_k -matrizes parciais têm respostas consideravelmente simples. Note-se, por exemplo, que todas as N_1 -matrizes parciais admitem, obviamente, N_1 -completamentos. O seguinte resultado encerra o problema de completamento de N_2 -matrizes parciais.

Lema 2.7. *Seja A uma N_2 -matriz parcial $n \times n$. A admite N_2 -completamentos se e somente se A não tem entradas especificadas nulas.*

Demonstração. Atendendo às propriedades das N_k -matrizes anteriormente apresentadas, sabemos que a não existência de entradas prescritas nulas é uma condição necessária para que A admita N_2 -completamentos. Vejamos, de seguida, que é, também, condição suficiente. Se $n = 2$, estamos perante o problema de completamento de uma N -matriz parcial 2×2 . Sabemos que, sendo A uma matriz parcial sinal-simétrica sem entradas especificadas nulas, existe um N -completamento A_c de A . Assim, todos os menores principais de A_c são negativos. Logo, A_c é uma N_2 -matriz. Se $n > 2$, consideremos todas as submatrizes principais de A de ordem 2. Cada uma dessas submatrizes é uma N -matriz parcial 2×2 sinal-simétrica e sem entradas prescritas nulas. Portanto, cada uma dessas submatrizes pode ser completada de modo a obter-se uma N -matriz. Como nunca completamos duas submatrizes principais 2×2 em simultâneo, no

final do processo, a matriz $n \times n$ resultante é tal que todas as submatrizes principais de ordem 2 têm determinante negativo, ou seja, é um N_2 -completamento de A . \square

Atendendo a determinados exemplos apresentados para o problema de completamento de N -matrizes, podemos afirmar que, em geral, uma N_k -matriz parcial sem entradas especificadas nulas não admite N_k -completamentos.

Para prosseguir o estudo deste problema, consideramos, nas próximas secções, restrições sobre o padrão da matriz parcial.

2.2.1 O caso combinatorialmente simétrico

Consideramos, nesta secção, a restrição do problema em questão a matrizes parciais combinatorialmente simétricas.

Tendo em conta que, no caso combinatorialmente simétrico, a entrada (i, j) é especificada se e somente se a entrada (j, i) é também especificada, podemos afirmar que uma N_k -matriz parcial combinatorialmente simétrica não tem entradas nulas prescritas se $k > 1$. Obtemos, então, do Lema 2.7, o seguinte resultado:

Corolário 2.3. *Toda a N_2 -matriz parcial combinatorialmente simétrica admite N_2 -completamentos.*

Sendo a classe das N_k -matrizes invariante para as semelhanças diagonais e de permutação, bem como para a multiplicação diagonal positiva, estas transformações são admissíveis para as N_k -matrizes parciais. Restringimos, então, o nosso estudo, nos casos em que $k \geq 3$, às N_k -matrizes parciais pertencentes a \mathcal{PS}_n , sem perda de generalidade.

Consideremos, agora, o caso combinatorialmente simétrico para a classe das N_3 -matrizes parciais.

Lema 2.8. *Toda a N_3 -matriz parcial combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , com um só par de entradas não especificadas admite N_3 -completamentos.*

Demonstração. Seja A uma N_3 -matriz parcial, pertencente a \mathcal{PS}_n , com apenas um par de entradas não especificadas, posicionalmente simétricas. Por semelhança de permutação, podemos assumir, sem perda de generalidade, que as entradas não especificadas são $(1, n)$ e $(n, 1)$. Podemos, ainda, admitir que todos os elementos da diagonal principal são iguais a -1 e que todas as entradas prescritas

são negativas. Assim, A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n-1} & ? \\ -a_{21} & -1 & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ ? & -a_{n2} & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} > 0$, para quaisquer i e j .

A única submatriz principal 2×2 não completamente especificada é a submatriz $A[\{1, n\}]$ e qualquer submatriz principal 3×3 não totalmente especificada é da forma

$$A[\{1, i, n\}] = \begin{bmatrix} -1 & -a_{1i} & ? \\ -a_{i1} & -1 & -a_{in} \\ ? & -a_{ni} & -1 \end{bmatrix}.$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, definamos o completamento

$$A_{x,y} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n-1} & -x \\ -a_{21} & -1 & \dots & -a_{2n-1} & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -y & -a_{n2} & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Segue-se que

$$\det A_{x,y}[\{1, n\}] = 1 - xy$$

e, para cada $i \in \{2, \dots, n-1\}$,

$$\det A_{x,y}[\{1, i, n\}] = -1 + a_{1i}a_{i1} + a_{in}a_{ni} - a_{i1}a_{ni}x - a_{1i}a_{in}y + xy.$$

Por forma a que $A_{x,y}$ seja uma N_3 -matriz, basta escolher x tal que

$$0 < x < \min_i \{a_{1i}a_{in}\}$$

e, fixo x , escolher y de tal modo que

$$y > \max_i \{(-1 + a_{1i}a_{i1} + a_{in}a_{ni} - a_{i1}a_{ni}x)(a_{1i}a_{in} - x)^{-1}, x^{-1}\}. \quad \square$$

Proposição 2.13. *Toda a N_3 -matriz parcial combinatorialmente simétrica pertencente a \mathcal{PS}_n admite N_3 -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução no número k de pares de entradas posicionalmente simétricas não especificadas. O lema anterior traduz o caso em que existe um só par de entradas posicionalmente simétricas não especificadas. Consideremos $k > 1$ e admitamos, como hipótese de indução, que existe um N_3 -completamento de toda a N_3 -matriz parcial combinatorialmente simétrica, pertencente a \mathcal{PS}_n , com $k - 1$ pares de entradas não especificadas. Seja $A \in \mathcal{PS}_n$ uma N_3 -matriz parcial combinatorialmente simétrica com k pares de entradas não prescritas. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que todos os elementos de A são negativos.

Consideremos um par de entradas não especificadas posicionalmente simétricas de A e todas as submatrizes principais maximais $A[\alpha_1], A[\alpha_2], \dots, A[\alpha_s]$ que este par completa. Para $i \in \{1, \dots, s\}$ e $x, y \in \mathbb{R}^+$, representemos por $A[\alpha_i]_{x,y}$ o completamento da matriz parcial $A[\alpha_i]$ tal que $-x$ completa a entrada não especificada da parte triangular superior e $-y$ completa a entrada não prescrita da parte triangular inferior. Seja $i \in \{1, \dots, s\}$. Atendendo à demonstração do lema anterior, sabemos que existe m_i tal que, para todo o $x \in]0, m_i[$, existe M_i tal que $A[\alpha_i]_{x,y}$ é uma N_3 -matriz sempre que $y \in]M_i, +\infty[$. Sejam $m = \min_i \{m_i\}$ e $x \in]0, m[$. Então, para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, existe M_i tal que $A[\alpha_i]_{x,y}$ é uma N_3 -matriz para qualquer $y \in]M_i, +\infty[$. Basta, então, considerar $M = \max_i \{M_i\}$ e $y \in]M, +\infty[$. Obtemos, então, uma N_3 -matriz parcial combinatorialmente simétrica com $k - 1$ pares de entradas não prescritas posicionalmente simétricas cujos elementos especificados são negativos. Tal matriz parcial é diagonalmente semelhante a um N_3 -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n com as mesmas entradas não especificadas. Por hipótese de indução, esta última matriz parcial admite N_3 -completamentos e, portanto, também A admite N_3 -completamentos. \square

A questão natural no seguimento deste estudo diz respeito à existência ou não de N_k -completamentos de N_k -matrizes parciais combinatorialmente simétricas pertencentes a \mathcal{PS}_n para $k \geq 4$. No entanto, este problema de completamento de matrizes intersecta o caso 2-cordal para as N -matrizes parciais, problema este ainda em aberto. Desconhecemos, portanto, a resposta a este problema em geral. Todavia, podemos garantir a completabilidade das N_k -matrizes parciais cujos grafos associados são 1-cordais. A demonstração será obviamente distinta da apresentada para o caso das N -matrizes, uma vez que partimos de menos hipóteses sobre as submatrizes principais totalmente especificadas. Mais concretamente, as submatrizes principais correspondentes aos cliques maximais do grafo associado podem ser não regulares.

Proposição 2.14. *Seja A uma N_k -matriz parcial cujo grafo associado é 1-cordal com dois cliques maximais. Então, A admite N_k -completamentos.*

Demonstração. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & X \\ a_{21}^T & -1 & a_{23}^T \\ Y & a_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

sendo as entradas de X e de Y as entradas não especificadas de A e sendo negativas todas as entradas especificadas de A . Caso A seja uma matriz parcial $n \times n$ com $n \leq k$ ou caso cada um dos cliques maximais seja de ordem não superior a k , podemos aplicar o referido resultado relativo às N -matrizes parciais. Admitimos, então, para o que se segue, que pelo menos um dos cliques é de ordem superior a k . Consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & -a_{12}a_{23}^T \\ a_{21}^T & -1 & a_{23}^T \\ -a_{32}a_{21}^T & a_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

de A . Vejamos que A_c é, com efeito, uma N_k -matriz.

Sejam

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{21}^T & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & a_{23}^T \\ a_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

e p o índice da entrada de sobreposição dos dois cliques maximais.

Consideremos um subconjunto α de $\{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq k$. Sejam $\alpha_1 \subseteq \{1, \dots, p-1\}$ e $\alpha_2 \subseteq \{p+1, \dots, n\}$ tais que $\alpha - \{p\} = \alpha_1 \cup \alpha_2$.

Se $\alpha_2 = \emptyset$, então $A_c[\alpha]$ é uma submatriz de A_1 , de ordem não superior a k . Se $\alpha_1 = \emptyset$, segue-se que $A_c[\alpha]$ é uma submatriz de A_2 , também de ordem não superior a k . Assim, em qualquer um destes casos, sabemos, por hipótese, que $\det A_c[\alpha] < 0$.

Estudemos, de seguida, o caso em que $\alpha_1, \alpha_2 \neq \emptyset$. Consideremos a submatriz $A_c[\alpha \cup \{p\}]$ e a partição

$$A_c[\alpha \cup \{p\}] = \begin{bmatrix} B & u & -uv^T \\ w^T & -1 & v^T \\ -zw^T & z & C \end{bmatrix},$$

onde $B = A_c[\alpha_1]$, $u = A_c[\alpha_1 \mid \{p\}]$, $w^T = A_c[\{p\} \mid \alpha_1]$, $v^T = A_c[\{p\} \mid \alpha_2]$, $z = A_c[\alpha_2 \mid \{p\}]$ e $C = A_c[\alpha_2]$.

Começamos por analisar o caso em que $p \in \alpha$. Somando à s -ésima linha de $A_c[\alpha]$ a p -ésima linha multiplicada pelo simétrico do elemento na entrada (s, p) , $s = p+1, \dots, n$, obtemos a matriz

$$\tilde{A}_c[\alpha] = \begin{bmatrix} B & u & -uv^T \\ w^T & -1 & v^T \\ 0 & 0 & \tilde{C} \end{bmatrix},$$

sendo

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & v^T \\ 0 & \tilde{C} \end{bmatrix}$$

a matriz obtida de $A_c[\{p\} \cup \alpha_2]$ somando à r -ésima linha a primeira linha multiplicada pelo simétrico do elemento na entrada $(r, 1)$, $r = 2, \dots, |\alpha_2| + 1$. Dado que $\det A_3 = \det A_c[\{p\} \cup \alpha_2] < 0$, podemos concluir que $\det \tilde{C} > 0$. Assim, $\det A_c[\alpha] = \det A_c[\alpha_1 \cup \{p\}] \det \tilde{C} < 0$, como queríamos demonstrar.

Atendamos, agora, ao caso em que $p \notin \alpha$. Note-se que, dado que $\alpha_1, \alpha_2 \neq \emptyset$, $|\alpha_1|, |\alpha_2| < k$. Temos que

$$A_c[\alpha] = \begin{bmatrix} B & -uv^T \\ -zw^T & C \end{bmatrix}.$$

Como B é uma matriz de ordem $|\alpha_1| < k$, sabemos que é uma matriz invertível. Também a matriz

$$\begin{bmatrix} B & u \\ w^T & -1 \end{bmatrix}$$

é de ordem não superior a k , pelo que tem determinante negativo, ou seja,

$$\det B \times \det(-1 - w^T B^{-1} u) < 0.$$

Podemos, então, afirmar que $\lambda = -w^T B^{-1} u > 1$. Além disso, como

$$\begin{bmatrix} -1 & v^T \\ z & C \end{bmatrix}$$

é uma matriz de ordem $|\alpha_2| + 1 \leq k$,

$$-1 \times \det(C - z(-1)v^T) < 0,$$

donde $\det(C + zv^T) > 0$.

Atendamos, agora, à submatriz $A_c[\alpha]$. Temos que

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} B & -uv^T \\ -zw^T & C \end{bmatrix} &= \det B \det(C - zw^T B^{-1} uv^T) \\ &= \det B \det(C + \lambda zv^T). \end{aligned}$$

Pretendemos mostrar que $\det(C + \lambda zv^T) > 0$. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$. Note-se que $r(zv^T) = 1$. Por uma questão de simplificação de escrita, denotemos por c_{ij}

e por b_{ij} os elementos de C e de zv^T , respectivamente. Recorrendo a propriedades dos determinantes, temos que

$$\begin{aligned} \det(C + \gamma zv^T) &= \det \begin{bmatrix} c_{11} + \gamma b_{11} & c_{12} + \gamma b_{12} & \dots & c_{1m} + \gamma b_{1m} \\ c_{21} + \gamma b_{21} & c_{22} + \gamma b_{22} & \dots & c_{2m} + \gamma b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} + \gamma b_{m1} & c_{m2} + \gamma b_{m2} & \dots & c_{mm} + \gamma b_{mm} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} + \gamma b_{12} & \dots & c_{1m} + \gamma b_{1m} \\ c_{21} & c_{22} + \gamma b_{22} & \dots & c_{2m} + \gamma b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} + \gamma b_{m2} & \dots & c_{mm} + \gamma b_{mm} \end{bmatrix} \\ &\quad + \gamma \det \begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} + \gamma b_{12} & \dots & c_{1m} + \gamma b_{1m} \\ b_{21} & c_{22} + \gamma b_{22} & \dots & c_{2m} + \gamma b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & c_{m2} + \gamma b_{m2} & \dots & c_{mm} + \gamma b_{mm} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando sucessivamente este raciocínio, temos que

$$\begin{aligned} \det(C + \gamma zv^T) &= \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix} + \gamma \det \begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ b_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix} \\ &\quad + \gamma \det \begin{bmatrix} c_{11} & b_{12} & c_{13} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & b_{22} & c_{23} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_{m1} & b_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix} + \dots + \gamma \det \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m-1} & b_{1m} \\ c_{21} & \dots & c_{2m-1} & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mm-1} & b_{mm} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\det(C + \gamma zv^T) = \det C + \gamma M,$$

onde

$$M = \det \begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ b_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m-1} & b_{1m} \\ c_{21} & \dots & c_{2m-1} & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mm-1} & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

Para $\gamma = 1$, temos que

$$\det(C + \gamma zv^T) = \det(C + zv^T) > 0.$$

Logo,

$$M > -\det C > 0.$$

Para $\gamma = \lambda$, temos que

$$\det(C + \gamma zv^T) = \det(C + \lambda zv^T) = \det C + \lambda M.$$

Assim,

$$\det(C + \lambda zv^T) > 0 \iff \lambda M > -\det C.$$

Como $\lambda > 1$ e $M > 0$, segue-se que

$$\lambda M > M > -\det C.$$

Portanto, $\det(C + \lambda zv^T) > 0$ e, conseqüentemente, $\det A_c[\alpha] < 0$, como pretendíamos demonstrar.

Verificámos, deste modo, que $\det A_c[\alpha] < 0$, para todo o subconjunto α de $\{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq k$. Portanto, A_c é, de facto, um N_k -completamento de A . \square

O teorema que se segue generaliza o resultado anterior.

Teorema 2.10. *Seja G um grafo não dirigido 1-cordal conexo. Toda a N_k -matriz parcial cujo grafo associado é G admite N_k -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução no número p de cliques maximais de G . O caso de p cliques maximais reduz-se ao caso de $p - 1$ cliques maximais, escolhendo um clique (o p -ésimo clique) que tem apenas um vértice em comum com qualquer outro clique maximal (a existência de tais cliques é garantida pelo modo como os grafos cordais são construídos). Completando o subgrafo induzido pelos restantes $p - 1$ cliques, o problema reduz-se ao caso de dois cliques maximais. O resultado para grafos 1-cordais com dois cliques maximais é estudado na proposição anterior. \square

Ainda relativamente ao caso combinatorialmente simétrico, podemos generalizar muito facilmente o resultado obtido para as N -matrizes parciais cujos grafos associados são ciclos. De facto, para $k > 1$, se A é uma N_k -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo, então A é uma N -matriz parcial. Assim, se $A \in \mathcal{PS}_n$, A admite N -completamentos, que são, claramente, N_k -matrizes.

2.2.2 O caso não combinatorialmente simétrico

Admitimos, nesta secção, que $k \geq 3$.

Em geral, uma N_k -matriz parcial não combinatorialmente simétrica não admite N_k -completamentos. Podemos comprovar este facto na Proposição 2.3.

Os resultados obtidos no problema de completamento de N -matrizes parciais não combinatorialmente simétricas cujos digrafos associados são acíclicos, ciclos, semiciclos ou duplos ciclos são facilmente generalizáveis para as N_k -matrizes parciais. De facto, uma N_k -matriz parcial A com um digrafo associado desse tipo é, com efeito, uma N -matriz. Ao garantir a existência de um completamento A_c de A que seja uma N -matriz, garantimos, também, a existência de um N_k -completamento de A .

Terminamos este capítulo abordando o problema de completamento de N_3 -matrizes para o caso dos digrafos CDUM.

Proposição 2.15. *Seja A uma N_3 -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n tal que D_A é um digrafo CDUM. Então, A admite N_3 -completamentos.*

Demonstração. Podemos admitir que toda a entrada $(i, i+1)$ de A , $i = 1, \dots, n$, é especificada, uma vez que, caso contrário, é possível completar tais entradas de modo a obter uma N_3 -matriz parcial.

Podemos, ainda, assumir, por multiplicação por uma matriz diagonal positiva e por semelhança diagonal, que todas as entradas especificadas são negativas e que as das diagonais principal e superior são todas iguais a -1 .

Facilmente se verifica, também, que é possível completar algumas das entradas de A por forma a obter uma N_3 -matriz parcial da forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? & ? & ? & \dots & ? & ? \\ -a_{21} & -1 & -1 & ? & ? & \dots & ? & ? \\ -a_{31} & -a_{32} & -1 & -1 & ? & \dots & ? & ? \\ -a_{41} & -a_{41} & -a_{43} & -1 & -1 & \dots & ? & ? \\ -a_{51} & -a_{51} & -a_{51} & -a_{54} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & \dots & -1 & -1 \\ -a_{n1} & -a_{n1} & -a_{n1} & -a_{n1} & -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

onde $a_{ii-1} > 1$, para $i = 2, \dots, n$, e $a_{ii-1} > a_{i1} > 0$, para $i = 3, \dots, n$.

Dado $x \in \mathbb{R}^+$, consideremos o completamento

$$\bar{A}_x = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x & -x & -x & \dots & -x & -x \\ -a_{21} & -1 & -1 & -x & -x & \dots & -x & -x \\ -a_{31} & -a_{32} & -1 & -1 & -x & \dots & -x & -x \\ -a_{41} & -a_{41} & -a_{43} & -1 & -1 & \dots & -x & -x \\ -a_{51} & -a_{51} & -a_{51} & -a_{54} & -1 & \dots & -x & -x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & -a_{n-1,1} & \dots & -1 & -1 \\ -a_{n1} & -a_{n1} & -a_{n1} & -a_{n1} & -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}$$

de \bar{A} .

Qualquer submatriz principal 2×2 não totalmente especificada de \bar{A} é da forma

$$F = \begin{bmatrix} -1 & ? \\ -a_{i1} & -1 \end{bmatrix}$$

e qualquer submatriz principal 3×3 não totalmente especificada de \bar{A} é de uma das seguintes formas

$$F_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? \\ -a_{ii-1} & -1 & -1 \\ -a_{i+1,1} & -a_{i+1i} & -1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -1 & ? & ? \\ -a_{i1} & -1 & -1 \\ -a_{i+1,1} & -a_{i+1i} & -1 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? \\ -a_{ii-1} & -1 & ? \\ -a_{j1} & -a_{j1} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad F_4 = \begin{bmatrix} -1 & ? & ? \\ -a_{i1} & -1 & ? \\ -a_{j1} & -a_{j1} & -1 \end{bmatrix}.$$

As correspondentes submatrizes principais de \bar{A}_x são da forma

$$F_x = \begin{bmatrix} -1 & -x \\ -a_{i1} & -1 \end{bmatrix}, \quad F_{1x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x \\ -a_{ii-1} & -1 & -1 \\ -a_{i+1,1} & -a_{i+1i} & -1 \end{bmatrix},$$

$$F_{2x} = \begin{bmatrix} -1 & -x & -x \\ -a_{i1} & -1 & -1 \\ -a_{i+1,1} & -a_{i+1i} & -1 \end{bmatrix}, \quad F_{3x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -x \\ -a_{ii-1} & -1 & -x \\ -a_{j1} & -a_{j1} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$F_{4x} = \begin{bmatrix} -1 & -x & -x \\ -a_{i1} & -1 & -x \\ -a_{j1} & -a_{j1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Simples cálculos mostram que os determinantes de todas as submatrizes principais destas formas são polinómios em x de grau 1 ou 2 cujo coeficiente director é negativo.

Assim, para cada $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $|\alpha| \leq 3$, existe $M_\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\det(\bar{A}_x[\alpha]) < 0$ para todo o $x > M_\alpha$.

Consideremos, então, $M = \max\{M_\alpha \mid \alpha \subseteq \{1, \dots, n\}\}$. Qualquer \bar{A}_x , com $x > M$, é um N_3 -completamento de \bar{A} e, por conseguinte, A admite N_3 -completamentos. \square

A questão mais geral relativa aos digrafos CDUM é, ainda, um problema em aberto. Conjecturamos, no entanto, que terá uma solução análoga à apresentada para $k = 3$.

Capítulo 3

Completamentos de matrizes totalmente não positivas parciais

Uma matriz diz-se totalmente não positiva se todos os seus menores são não positivos. Abordamos, neste capítulo, o problema de completamento desta classe de matrizes. Analisando este problema numa perspectiva combinatorial, procuramos identificar os grafos G para os quais todas as matrizes totalmente não positivas parciais cujo grafo associado é G têm um completamento totalmente não positivo. Tratamos, ainda, a questão análoga para matrizes parciais não combinatorialmente simétricas e digrafos.

Numa primeira abordagem, concluímos, com base numa série de resultados, que a existência de entradas especificadas nulas condiciona fortemente a existência de completamentos totalmente não positivos para todas as matrizes totalmente não positivas parciais associadas a uma grande quantidade de grafos e digrafos.

Neste cenário, continuamos o nosso estudo exigindo uma nova condição sobre elementos da diagonal principal da matriz: que sejam negativos. Obtemos, então, resultados relativos a matrizes parciais cujos grafos associados são 1-cordais monotonamente etiquetados com vértice separador minimal invertível. Consideramos, ainda, os casos dos duplos triângulos, dos grafos cordais não monotonamente etiquetados e dos ciclos monotonamente etiquetados. Excluindo a existência de entradas prescritas nulas, analisamos o problema de completamento em questão para o caso não combinatorialmente simétrico, apresentando condições necessárias e suficientes para a completabilidade de caminhos totalmente especificados, ciclos dirigidos e duplos ciclos monotonamente etiquetados.

Finalmente, numa última secção, abordamos uma questão pontual relativa a grafos cordais quando exigimos apenas a não positividade dos determinantes das submatrizes de ordem não superior a 2.

3.1 TNP -matrizes parciais

Dirigimos, agora, o nosso estudo para o problema de completamento de matrizes totalmente não positivas: o nosso objectivo é determinar quais as matrizes parciais que admitem completamentos que sejam TNP -matrizes.

Atendendo a que toda a submatriz quadrada de uma TNP -matriz é, ainda, uma TNP -matriz, para que uma matriz parcial admita TNP -completamentos, é necessário que todas as submatrizes quadradas totalmente especificadas sejam matrizes totalmente não positivas. Apresentamos, então, a seguinte definição.

Definição 3.1. *Uma matriz parcial quadrada A diz-se uma TNP -matriz parcial se todas as submatrizes quadradas totalmente especificadas de A são TNP -matrizes.*

Para que uma dada matriz parcial A admita TNP -matrizes como completamentos, é claramente necessário que A seja uma TNP -matriz parcial. Designaremos por TNP -completamento de A qualquer completamento de A que seja uma TNP -matriz.

Exemplo 3.1. A matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & ? \\ ? & -1 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma TNP -matriz parcial, uma vez que toda a sua submatriz quadrada totalmente prescrita é uma matriz totalmente não positiva, e

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -8 \\ -3 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

é um seu TNP -completamento.

Consideramos, apenas, matrizes parciais em que as entradas diagonais são prescritas.

Relembremos que a classe destas matrizes é invariante para a multiplicação diagonal positiva, à esquerda ou à direita, bem como para a semelhança diagonal positiva. Consequentemente, no contexto das matrizes parciais, podemos concluir que o estudo do problema de completamento para uma matriz parcial A pode reduzir-se, sem perda de generalidade, ao estudo do problema para as matrizes parciais DA , AD ou DAD^{-1} , onde D é uma matriz diagonal positiva. Em

particular, podemos assumir que todas as entradas diagonais não nulas são iguais a -1 .

Dado que a classe das TNP -matrizes não é invariante para as semelhanças de permutação, é necessário considerar grafos etiquetados, ou seja, grafos em que a numeração dos vértices é fixada. Se A e B são duas TNP -matrizes parciais com grafos associados isomorfos, G_A e G_B , respectivamente, e se A admite TNP -completamentos, nada podemos afirmar, em geral, sobre a existência de TNP -completamentos de B . Consideremos, por exemplo, as matrizes parciais

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & ? \\ -1 & -1 & -1 \\ ? & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & ? \\ -2 & ? & -1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que A e B são TNP -matrizes parciais cujos grafos das entradas especificadas são isomorfos. Temos que

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

é um TNP -completamento de A . No entanto, B não admite TNP -matrizes como completamentos. De facto, dados $x, y \in \mathbb{R}_0^+$,

$$B_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -x \\ -2 & -y & -1 \end{bmatrix}$$

é tal que $\det B_c [\{1, 2\}|\{2, 3\}] \leq 0$ se e só se $x \leq 1$ e $\det B_c [\{2, 3\}|\{1, 3\}] \leq 0$ se e somente se $x \geq 2$. Podemos, portanto, concluir, com base neste exemplo, que a fixação da numeração dos vértices nos grafos é essencial no estudo da existência de TNP -completamentos.

Dizemos que um *grafo* G *admite* TNP -completamentos se todas as TNP -matrizes parciais combinatorialmente simétricas, cujo grafo das entradas especificadas é G , admitem TNP -completamentos. Analogamente, dizemos que um *digrafo* D *admite* TNP -completamentos se todas as TNP -matrizes parciais não combinatorialmente simétricas, cujo digrafo associado é D , admitem TNP -completamentos.

Nesta secção analisaremos o problema de completamento de TNP -matrizes parciais, abordando a questão do ponto de vista da teoria de grafos. Pretendemos determinar que condições são necessárias para a existência de TNP -completamentos de um grafo.

O seguinte resultado diz respeito a grafos dirigidos:

Proposição 3.1. *Dado um qualquer grafo dirigido D , existe uma TNP -matriz parcial não combinatorialmente simétrica, cujo digrafo das entradas especificadas é D , que não admite TNP -completamentos. Por outras palavras, nenhum digrafo admite TNP -completamentos.*

Demonstração. Seja $D = (V, E)$, onde $V = \{1, \dots, n\}$. Sabemos que existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tais que $(i, j) \in E$ e $(j, i) \notin E$. Consideremos a matriz parcial $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$, $n \times n$, definida por

$$1. \ A[\{i, j\}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ ? & -1 \end{bmatrix} \text{ se } i < j;$$

$$2. \ A[\{i, j\}] = \begin{bmatrix} -1 & ? \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ se } i > j;$$

$$3. \ a_{kl} = 0 \text{ para quaisquer } k, l \in \{1, \dots, n\} \text{ tais que } (k, l) \in E - \{(i, j)\}.$$

As submatrizes de A totalmente especificadas de ordem superior a 1, caso existam, têm, no máximo, uma entrada não nula. Logo, tais submatrizes, caso existam, têm determinante nulo. Podemos, portanto, afirmar que A é uma TNP -matriz parcial, cujo digrafo das entradas especificadas é D .

Mostremos, agora, que nenhum completamento A_c de A é uma TNP -matriz. Independentemente do valor com que especificamos a entrada (j, i) , temos que $\det A_c[\{i, j\}] = 1$. Logo, A não admite TNP -completamentos. \square

Atendamos, agora, ao caso dos grafos não dirigidos.

Lema 3.1. *Se um grafo não dirigido G admite TNP -completamentos e G contém as arestas $\{i, j\}$ e $\{j, k\}$, para alguns i, j, k vértices distintos, então G contém, também, a aresta $\{i, k\}$. Por outras palavras, se G contém as arestas $\{i, j\}$ e $\{j, k\}$, então o subgrafo induzido pelos vértices i, j, k é completo.*

Demonstração. Suponhamos que $G = (V, E)$ não contém a aresta $\{i, k\}$. Dado que a classe das TNP -matrizes não é invariante para as semelhanças de permutação, não podemos assumir que $i < j < k$: é necessário analisar todas as possibilidades. No entanto, facilmente se verifica que qualquer dos possíveis casos é análogo a um dos que de seguida apresentamos:

(a) $i < j < k$

Dada uma matriz parcial A , cujo grafo das entradas especificadas é G , a submatriz $A[\{i, j, k\}]$ de A é da forma

$$A[\{i, j, k\}] = \begin{bmatrix} * & * & ? \\ * & * & * \\ ? & * & * \end{bmatrix},$$

onde $*$ representa uma entrada especificada. Consideremos a matriz parcial $A = (a_{lm})_{l,m=1}^n$ definida por

1. $A[\{i, j, k\}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? \\ -2 & 0 & -1 \\ ? & -2 & -1 \end{bmatrix};$
2. $a_{lm} = 0$, para $l, m \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\{l, m\} \in E - \{\{i, j\}, \{j, k\}\}$.

Vejamos que A é uma TNP -matriz parcial. Temos que

$$\det A[\{i, j\}] = \det A[\{j, k\}] = -2.$$

Todas as restantes submatrizes de A totalmente especificadas de ordem superior a 1, caso existam, têm uma linha ou uma coluna nula. Logo, se tais submatrizes existem, têm determinante nulo. Assim, A é, de facto, uma TNP -matriz parcial. Além disso, o grafo das entradas especificadas de A é, obviamente, G . Dado um completamento A_c de A , o determinante da sua submatriz $A_c[\{j, k\}|\{i, j\}]$ é positivo. Logo, A não admite TNP -completamentos.

(b) $i < k < j$

Neste caso, se A é uma matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é G , então $A[\{i, k, j\}]$ é da forma

$$A[\{i, k, j\}] = \begin{bmatrix} * & ? & * \\ ? & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix},$$

onde $*$ representa uma entrada prescrita. Seja $A = (a_{lm})_{l,m=1}^n$ a matriz parcial definida por

1. $A[\{i, k, j\}] = \begin{bmatrix} -1 & ? & -1 \\ ? & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix};$
2. $a_{lm} = 0$, para $l, m \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\{l, m\} \in E - \{\{i, j\}, \{j, k\}\}$.

Temos que

$$\det A[\{i, j\}] = -1$$

e

$$\det A[\{k, j\}] = -2.$$

As restantes submatrizes de A totalmente especificadas de ordem superior a 1, caso existam, têm uma linha ou uma coluna nula e, por conseguinte, são singulares. Logo, A é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é G . Dados $x, y \in \mathbb{R}_0^-$, seja A_c o complemento

$$A_c[\{i, k, j\}] = \begin{bmatrix} -1 & y & -1 \\ x & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Simples cálculos mostram que $\det A_c[\{k, j\}|\{i, k\}]$ é não positivo se e somente se $x = 0$ e que $\det A_c[\{i, k\}|\{i, j\}]$ é não positivo se e só se $x \leq -1$. Portanto, A_c não é uma TNP -matriz e A não admite TNP -complementamentos.

Em qualquer dos casos, existe uma TNP -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é G , que não admite TNP -complementamentos. Logo, G não admite TNP -complementamentos. \square

O lema anterior permite-nos obter o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Seja G um grafo que admite TNP -complementamentos. Então, o subgrafo induzido por qualquer caminho em G é completo.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo que admite TNP -complementamentos. Atendendo ao Lema 3.1, sabemos que o subgrafo induzido por qualquer caminho de comprimento 2 é completo.

Admitamos, agora, que o resultado é válido para qualquer caminho de comprimento $m < k$. Suponhamos que G contém um caminho de comprimento k , digamos $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, i_{k+1}\}$, onde $i_1, \dots, i_k, i_{k+1} \in V$. Consideremos o caminho $\{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}$. Pela hipótese de indução, o subgrafo induzido pelos vértices i_1, \dots, i_{k-1}, i_k é completo, ou seja, $\{j, l\} \in E$, para quaisquer $j, l \in \{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k\}$. Um argumento semelhante pode ser usado para provar que o subgrafo induzido pelos vértices $i_2, i_3, \dots, i_k, i_{k+1}$ é completo, ou seja, $\{j, l\} \in E$, para quaisquer $j, l \in \{i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\}$. Para concluir a demonstração, resta provar que $\{i_1, i_{k+1}\} \in E$. Temos que $\{i_1, i_k\}, \{i_k, i_{k+1}\} \in E$. Assim, pelo Lema 3.1, também $\{i_1, i_{k+1}\} \in E$. Portanto, o subgrafo induzido pelo caminho $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}, \{i_k, i_{k+1}\}$ é completo. \square

Corolário 3.1. *Seja G um grafo que admite TNP -complementamentos. Então, qualquer seu subgrafo induzido conexo é completo.*

Demonstração. Sejam $G = (V, E)$ um grafo que admite TNP -completamentos e $H = (V(H), E(H))$ um seu subgrafo induzido conexo. Podemos admitir que H tem pelo menos 2 vértices.

Sejam $i, j \in V(H)$ tais que $i \neq j$. Sendo H conexo, existe um caminho Γ de i para j em H e, consequentemente, em G . Pelo resultado anterior, $\langle V(\Gamma) \rangle$ é completo. Sendo H um subgrafo induzido de G , todas as arestas de $\langle V(\Gamma) \rangle$ pertencem a $E(H)$. Em particular, $\{i, j\} \in E(H)$.

Vimos, assim, que se $i, j \in V(H)$, então $\{i, j\} \in E(H)$, ou seja, que H é completo. \square

Podemos comprovar, pelo exemplo que de seguida apresentamos, que, em geral, um grafo G cujos subgrafos induzidos conexos são completos não admite TNP -completamentos.

Exemplo 3.2. Consideremos a seguinte TNP -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? \\ -2 & 0 & ? \\ ? & ? & -1 \end{bmatrix}.$$

O grafo das entradas especificadas de A é tal que todos os seu subgrafos induzidos conexos são completos. No entanto, A não admite TNP -completamentos. Seja

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & x \\ -2 & 0 & y \\ z & w & -1 \end{bmatrix}$$

um completamento de A . Por forma a que $\det A_c [\{1, 2\}|\{2, 3\}]$ seja não positivo, é necessário que $y = 0$. Mas, nesse caso, $\det A_c [\{2, 3\}|\{1, 3\}] = 2$. Portanto, A_c não é uma TNP -matriz, independentemente dos valores de x, y, z e w .

Uma rápida análise aos resultados apresentados nesta secção permite-nos afirmar que a existência de entradas nulas condiciona fortemente a existência de TNP -completamentos de uma grande quantidade de grafos. Tal facto ilustra a motivação para a exigência de determinadas condições nas entradas especificadas em todos os resultados apresentados nas secções que se seguem.

3.1.1 Grafos cordais

Consideramos, nesta secção, o problema de completamento em questão para matrizes parciais combinatorialmente simétricas cujos grafos associados são grafos cordais. Tendo em conta que a classe das TNP -matrizes não é invariante para as semelhanças de permutação em geral, começamos por considerar grafos cordais monotonamente etiquetados.

Vejamos que, em geral, se G é um grafo 1-cordal conexo monotonamente etiquetado, então G não admite TNP -completamentos. Para tal, basta-nos encontrar uma TNP -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é G , que não admita TNP -completamentos.

Dado um grafo 1-cordal conexo monotonamente etiquetado G com n vértices, sabemos que existem naturais $1 < n_1 < n_2 < \dots < n_p = n$ tais que $E(G)$ é dado por $(\{1, 2, \dots, n_1\} \times \{1, 2, \dots, n_1\}) \cup (\{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\} \times \{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}) \cup \dots \cup (\{n_{p-1}, n_{p-1} + 1, \dots, n_p\} \times \{n_{p-1}, n_{p-1} + 1, \dots, n_p\})$. Temos, assim, p cliques maximais e os vértices separadores minimais têm apenas 1 vértice.

Seja A uma matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é G . Aten-damos à submatriz $A[\{n_1 - 1, n_1, n_1 + 1\}]$. Tal submatriz é da forma

$$A[\{n_1 - 1, n_1, n_1 + 1\}] = \begin{bmatrix} * & * & ? \\ * & * & * \\ ? & * & * \end{bmatrix},$$

onde $*$ representa uma entrada especificada. Temos, pois, que G contém as arestas $\{n_1 - 1, n_1\}$ e $\{n_1, n_1 + 1\}$, mas não contém a aresta $\{n_1 - 1, n_1 + 1\}$.

Com base no Lema 3.1 e na respectiva demonstração, construímos a seguinte TNP -matriz parcial, cujo grafo associado é G :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ 0 & 0 & \dots & -2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ ? & ? & \dots & ? & -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ ? & ? & \dots & ? & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & ? & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ ? & ? & \dots & ? & ? & ? & ? & \dots & 0 & 0 & \dots & ? & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & ? & ? & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ ? & ? & \dots & ? & ? & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & ? & ? & ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que a submatriz $A_c[\{n_1, n_1 + 1\}][\{n_1 - 1, n_1\}]$ tem determinante positivo, para qualquer completamento A_c de A . Portanto, A não admite TNP -comple-tamentos.

Concluimos, assim, que G não admite TNP -completamentos.

Podemos, no entanto, garantir a existência de TNP -completamentos de determinadas TNP -matrizes parciais cujo grafo associado é G . Ao longo do estudo desenvolvido neste caso, baseamo-nos, amiúde, no seguinte facto devido a Frobenius-König.

Lema 3.2. *Seja A uma matriz $n \times n$ com uma submatriz $p \times q$ de zeros. Se $p + q \geq n + 1$, então A é singular.*

Começamos por considerar um caso particular dos grafos 1-cordais monotona-mente etiquetados, nomeadamente o caso em que existem, apenas, dois cliques maximais.

Proposição 3.3. *Seja A uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal monotona-mente etiquetado com dois cliques maximais e tal que a entrada correspondente ao vértice separador minimal é não nula. Então, A admite TNP -completamentos.*

Demonstração. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & ? \\ A_{21}^T & -1 & A_{23}^T \\ ? & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

onde $A_{12}, A_{21} \in \mathbb{R}^p$, $A_{23}, A_{32} \in \mathbb{R}^q$ e $p + q = n - 1$.

Consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{12}A_{23}^T \\ A_{21}^T & -1 & A_{23}^T \\ -A_{32}A_{21}^T & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

de A . Pretendemos mostrar que A_c é uma TNP -matriz.

Sejam $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ tais que $|\alpha| = |\beta|$. Seja k o índice de sobreposição dos cliques. Podemos definir $\alpha_1, \beta_1 \subseteq \{1, \dots, k-1\}$, $\alpha_2, \beta_2 \subseteq \{k+1, \dots, n\}$ tais que $\alpha - \{k\} = \alpha_1 \cup \alpha_2$ e $\beta - \{k\} = \beta_1 \cup \beta_2$.

Obviamente, se $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\det A_c[\alpha|\beta] \leq 0$. Consideramos, então, no que se segue, apenas submatrizes de ordem superior a 1.

Começemos por estudar os casos em que pelo menos um dos conjuntos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ é vazio. Consideramos os seguintes casos:

(1.) $\alpha_1 \neq \emptyset$ e $\alpha_2 = \emptyset$

(1.1.) $\beta_2 = \emptyset$

Neste caso, $A_c[\alpha|\beta]$ é uma submatriz de

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}^T & -1 \end{bmatrix}.$$

É, portanto, uma submatriz totalmente especificada de A , pelo que tem determinante não positivo.

(1.2.) $|\beta_2| = 1$

Neste caso, sabemos que existem naturais $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq k$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$, com $j_{t-1} \leq k < j_t$, tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. Assim, $A_c[\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & -a_{i_1 j_2} & \dots & -a_{i_1 j_{t-1}} & -a_{i_1 k} a_{k j_t} \\ -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & -a_{i_2 j_{t-1}} & -a_{i_2 k} a_{k j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{i_t j_1} & -a_{i_t j_2} & \dots & -a_{i_t j_{t-1}} & -a_{i_t k} a_{k j_t} \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é não negativo. Se $k \in \beta$, então $j_{t-1} = k$ e $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$. Se $k \notin \beta$, $\det A_c[\alpha|\beta] = a_{k j_t} \det A_c[\alpha|(\beta - \beta_2) \cup \{k\}] \leq 0$.

(1.3.) $|\beta_2| > 1$

Neste caso, existem naturais $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq k$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s < j_{s+1} < \dots < j_t \leq n$, com $j_s \leq k < j_{s+1}$, tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. Assim, $A_c[\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & -a_{i_1 j_2} & \dots & -a_{i_1 j_s} & -a_{i_1 k} a_{k j_{s+1}} & \dots & -a_{i_1 k} a_{k j_t} \\ -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & -a_{i_2 j_s} & -a_{i_2 k} a_{k j_{s+1}} & \dots & -a_{i_2 k} a_{k j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_t j_1} & -a_{i_t j_2} & \dots & -a_{i_t j_s} & -a_{i_t k} a_{k j_{s+1}} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_t} \end{bmatrix},$$

com todo o a_{ij} não negativo, pelo que $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

(2.) $\alpha_1 = \emptyset$ e $\alpha_2 \neq \emptyset$

(2.1.) $\beta_1 = \emptyset$

Neste caso, $A_c[\alpha|\beta]$ é, então, submatriz de

$$\begin{bmatrix} -1 & A_{23}^T \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

pelo que $\det A_c[\alpha|\beta] \leq 0$.

(2.2.) $|\beta_1| = 1$

Neste caso, sabemos que existem naturais $k \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$, com $j_1 < k \leq j_2$, tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. Assim, $A_c[\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 k} a_{k j_1} & -a_{i_1 j_2} & \dots & -a_{i_1 j_{t-1}} & -a_{i_1 j_t} \\ -a_{i_2 k} a_{k j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & -a_{i_2 j_{t-1}} & -a_{i_2 j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{i_t k} a_{k j_1} & -a_{i_t j_2} & \dots & -a_{i_t j_{t-1}} & -a_{i_t j_t} \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é não negativo. Se $k \in \beta$, então $j_2 = k$ e $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$. Se $k \notin \beta$, $\det A_c[\alpha|\beta] = a_{k j_1} \det A_c[\alpha|(\beta - \beta_1) \cup \{k\}] \leq 0$.

(2.3.) $|\beta_1| > 1$

Sabemos, então, que existem $k \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n$ e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s < j_{s+1} < \dots < j_t \leq n$, com $j_s < k \leq j_{s+1}$, tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. A submatriz $A_c[\alpha|\beta]$ é, portanto, da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_1 k} a_{k j_s} & -a_{i_1 j_{s+1}} & \dots & -a_{i_1 j_{t-1}} & -a_{i_1 j_t} \\ -a_{i_2 k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_2 k} a_{k j_s} & -a_{i_2 j_{s+1}} & \dots & -a_{i_2 j_{t-1}} & -a_{i_2 j_t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{i_t k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_s} & -a_{i_t j_{s+1}} & \dots & -a_{i_t j_{t-1}} & -a_{i_t j_t} \end{bmatrix},$$

sendo todo o a_{ij} não negativo, donde $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

(3.) $\alpha_1 \neq \emptyset$ e $\alpha_2 \neq \emptyset$

(3.1.) $\beta_1 \neq \emptyset$ e $\beta_2 = \emptyset$

(3.1.1.) $|\alpha_2| = 1$

Neste caso, existem naturais $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n$, com $i_{t-1} \leq k < i_t$, e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq k$ tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. Logo, $A_c[\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & -a_{i_1 j_2} & \dots & -a_{i_1 j_t} \\ -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & -a_{i_2 j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_{t-1} j_1} & -a_{i_{t-1} j_2} & \dots & -a_{i_{t-1} j_t} \\ -a_{i_t k} a_{k j_1} & -a_{i_t k} a_{k j_2} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_t} \end{bmatrix},$$

com cada a_{ij} não negativo. Se $k \in \alpha$, isto é, se $i_{t-1} = k$, então $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$. Se $k \notin \alpha$, $\det A_c[\alpha|\beta] = a_{i_t k} \det A_c[(\alpha - \alpha_2) \cup \{k\}|\beta] \leq 0$.

(3.1.2.) $|\alpha_2| > 1$

Existem, então, naturais $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s < i_{s+1} < \dots < i_t \leq n$, com $i_s \leq k < i_{s+1}$, e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq k$ tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. Assim, a submatriz $A_c[\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & -a_{i_1 j_2} & \dots & -a_{i_1 j_t} \\ -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & -a_{i_2 j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & -a_{i_s j_2} & \dots & -a_{i_s j_t} \\ -a_{i_{s+1} k} a_{k j_1} & -a_{i_{s+1} k} a_{k j_2} & \dots & -a_{i_{s+1} k} a_{k j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_t k} a_{k j_1} & -a_{i_t k} a_{k j_2} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_t} \end{bmatrix},$$

onde todo o a_{ij} é não negativo. Podemos, pois, afirmar que $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

(3.2.) $\beta_1 = \emptyset$ e $\beta_2 \neq \emptyset$

(3.2.1.) $|\alpha_1| = 1$

Sabemos, neste caso, que existem naturais $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n$, com $i_1 < k \leq i_2$, e $k \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$ tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. A submatriz $A_c[\alpha|\beta]$ é, então, da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 k} a_{k j_1} & -a_{i_1 k} a_{k j_2} & \dots & -a_{i_1 k} a_{k j_t} \\ -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & -a_{i_2 j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_t j_1} & -a_{i_t j_2} & \dots & -a_{i_t j_t} \end{bmatrix},$$

com $a_{ij} \geq 0$ para quaisquer i e j . Por conseguinte, se $k \in \alpha$, $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$. Se $k \notin \alpha$, $\det A_c[\alpha|\beta] = a_{i_1 k} \det A_c[(\alpha - \alpha_1) \cup \{k\}|\beta] \leq 0$.

(3.2.2.) $|\alpha_1| > 1$

Existem naturais $1 \leq i_1 < \dots < i_s < i_{s+1} < \dots < i_t \leq n$, com $i_s < k \leq i_{s+1}$, e $k \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq n$ tais que $\alpha = \{i_1, \dots, i_t\}$ e $\beta = \{j_1, \dots, j_t\}$. Assim, $A_c[\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 k} a_{k j_1} & -a_{i_1 k} a_{k j_2} & \dots & -a_{i_1 k} a_{k j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_s k} a_{k j_1} & -a_{i_s k} a_{k j_2} & \dots & -a_{i_s k} a_{k j_t} \\ -a_{i_{s+1} j_1} & -a_{i_{s+1} j_2} & \dots & -a_{i_{s+1} j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_t j_1} & -a_{i_t j_2} & \dots & -a_{i_t j_t} \end{bmatrix},$$

com cada a_{ij} não negativo. Logo, $\det A_c [\alpha|\beta] = 0$.

Para concluir a demonstração, resta-nos estudar o caso em que todos os conjuntos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 são não vazios.

Sabemos, então, que existem $i_1, i_2, \dots, i_s, i_{s+1}, \dots, i_t, j_1, j_2, \dots, j_r, j_{r+1}, \dots, j_p \in \{1, \dots, n\}$ tais que $i_1 < \dots < i_s < i_{s+1} < \dots < i_t, j_1 < \dots < j_r < j_{r+1} < \dots < j_p$ e $\alpha_1 = \{i_1, \dots, i_s\}$, $\alpha_2 = \{i_{s+1}, \dots, i_t\}$, $\beta_1 = \{j_1, \dots, j_r\}$ e $\beta_2 = \{j_{r+1}, \dots, j_p\}$.

Consideramos as seguintes situações:

(1.) $k \in \alpha$ e $k \in \beta$

Neste caso, $t = p$ e $A_c [\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & \dots & -a_{i_1 j_r} & -a_{i_1 k} & -a_{i_1 k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_1 k} a_{k j_t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & \dots & -a_{i_s j_r} & -a_{i_s k} & -a_{i_s k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_s k} a_{k j_t} \\ -a_{k j_1} & \dots & -a_{k j_r} & -1 & -a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{k j_t} \\ -a_{i_{s+1} k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_{s+1} k} a_{k j_r} & -a_{i_{s+1} k} & -a_{i_{s+1} j_{r+1}} & \dots & -a_{i_{s+1} j_t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_t k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_r} & -a_{i_t k} & -a_{i_t j_{r+1}} & \dots & -a_{i_t j_t} \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é não negativo.

(1.1.) $|\beta_1| - |\alpha_1| \geq 1$

Para cada $l \in \{s+1, \dots, t\}$ tal que $a_{i_l k} \neq 0$, substituímos a $(l+1)$ -ésima linha de $A_c [\alpha|\beta]$ pela sua soma com a $(s+1)$ -ésima linha multiplicada por $-a_{i_l k}$. Obtemos uma matriz \tilde{A} da forma

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_c[\alpha_1 \cup \{k}|\beta_1 \cup \{k\}] & A_c[\alpha_1 \cup \{k}|\beta_2] \\ \hline 0 & B \end{array} \right].$$

Note-se que \tilde{A} tem uma submatriz $|\alpha_2| \times (|\beta_1| + 1)$ de zeros. Atendendo ao Lema 3.2, sabemos que $\det \tilde{A} = 0$ se $|\alpha_2| + |\beta_1| + 1 \geq |\alpha| + 1$. Ora,

$$\begin{aligned} |\alpha_2| + |\beta_1| + 1 \geq |\alpha| + 1 &\iff |\alpha_2| + |\beta_1| + 1 \geq |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1 + 1 \\ &\iff |\beta_1| - |\alpha_1| \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\det \tilde{A} = 0$ e, por conseguinte, $\det A_c [\alpha|\beta] = 0$.

(1.2.) $|\beta_1| - |\alpha_1| = 0$

Consideremos, uma vez mais, as transformações elementares referidas no caso anterior e a matriz obtida \tilde{A} . Note-se que $|\beta_1| = |\alpha_1|$, pelo que $A_c[\alpha_1 \cup \{k}|\beta_1 \cup \{k\}]$

e B são matrizes quadradas. Assim, \tilde{A} é uma matriz triangular por blocos, pelo que $\det \tilde{A} = \det A_c[\alpha_1 \cup \{k\} | \beta_1 \cup \{k\}] \det B$. Vejamos que B tem determinante não negativo. Consideremos a submatriz

$$A_c[\{k\} \cup \alpha_2 | \{k\} \cup \beta_2] = \begin{bmatrix} -1 & -a_{kj_{r+1}} & \cdots & -a_{kj_t} \\ -a_{i_{s+1}k} & -a_{i_{s+1}j_{r+1}} & \cdots & -a_{i_{s+1}j_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_tk} & -a_{i_tj_{r+1}} & \cdots & -a_{i_tj_t} \end{bmatrix}.$$

Para cada $l \in \{s+1, \dots, t\}$ tal que $a_{i_lk} \neq 0$, substituímos a $(l - s + 1)$ -ésima linha de $A_c[\{k\} \cup \alpha_2 | \{k\} \cup \beta_2]$ pela sua soma com a primeira linha multiplicada por $-a_{i_lk}$. Obtemos a matriz

$$C = \left[\begin{array}{c|c} -1 & A_c[\{k\} | \beta_2] \\ \hline 0 & B \end{array} \right].$$

Como $\det C = \det A_c[\{k\} \cup \alpha_2 | \{k\} \cup \beta_2] \leq 0$ e $\det C = -1 \times \det B$, podemos afirmar que $\det B \geq 0$. Portanto, $\det \tilde{A} \leq 0$ e, por conseguinte, $\det A_c[\alpha | \beta] \leq 0$.

(1.3.) $|\alpha_1| - |\beta_1| \geq 1$

Seguindo um raciocínio semelhante, obtemos uma matriz \bar{A} da forma

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline A_c[\{k\} \cup \alpha_2 | \beta_1] & A_c[\{k\} \cup \alpha_2 | \{k\} \cup \beta_2] \end{array} \right].$$

Note-se que \bar{A} tem uma submatriz $|\alpha_1| \times (|\beta_2| + 1)$ de zeros. Pelo Lema 3.2, sabemos que $\det \bar{A} = 0$ se $|\alpha_1| + |\beta_2| + 1 \geq |\alpha| + 1$. Dado que

$$\begin{aligned} |\alpha_1| + |\beta_2| + 1 \geq |\alpha| + 1 &\iff |\alpha_1| + |\beta_2| + 1 \geq |\beta_1| + |\beta_2| + 1 + 1 \\ &\iff |\alpha_1| - |\beta_1| \geq 1, \end{aligned}$$

podemos concluir que $\det \bar{A} = 0$ e, portanto, $\det A_c[\alpha | \beta] = 0$.

(2.) $k \in \alpha$ e $k \notin \beta$

Neste caso, $t = p - 1$ e $A_c[\alpha | \beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1j_1} & \cdots & -a_{i_1j_r} & -a_{i_1k}a_{kj_{r+1}} & \cdots & -a_{i_1k}a_{kj_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_{s+1}j_1} & \cdots & -a_{i_{s+1}j_r} & -a_{i_{s+1}k}a_{kj_{r+1}} & \cdots & -a_{i_{s+1}k}a_{kj_p} \\ -a_{kj_1} & \cdots & -a_{kj_r} & -a_{kj_{r+1}} & \cdots & -a_{kj_p} \\ -a_{i_{s+1}k}a_{kj_1} & \cdots & -a_{i_{s+1}k}a_{kj_r} & -a_{i_{s+1}k}a_{kj_{r+1}} & \cdots & -a_{i_{s+1}k}a_{kj_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_tk}a_{kj_1} & \cdots & -a_{i_tk}a_{kj_r} & -a_{i_tk}a_{kj_{r+1}} & \cdots & -a_{i_tk}a_{kj_p} \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} \geq 0$ para quaisquer i e j .

$$(2.1.) \quad |\beta_1| - |\alpha_1| \geq 2$$

Seguindo um raciocínio análogo ao apresentado para casos anteriores, podemos obter, usando transformações elementares adequadas, uma matriz \tilde{A} da forma

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_c[\alpha_1 \cup \{k\}|\beta_1] & A_c[\alpha_1 \cup \{k\}|\beta_2] \\ \hline 0 & B \end{array} \right],$$

com determinante igual a $A_c[\alpha|\beta]$. Observe-se que \tilde{A} tem uma submatriz nula $|\alpha_2| \times |\beta_1|$. Atendendo ao Lema 3.2 e a que

$$\begin{aligned} |\alpha_2| + |\beta_1| \geq |\alpha| + 1 &\iff |\alpha_2| + |\beta_1| \geq |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1 + 1 \\ &\iff |\beta_1| - |\alpha_1| \geq 2, \end{aligned}$$

podemos afirmar que $\det A_c[\alpha|\beta] = \det \tilde{A} = 0$.

$$(2.2.) \quad |\beta_1| - |\alpha_1| = 1$$

Atendamos às transformações elementares referidas nos caso anterior e à matriz \tilde{A} obtida por meio dessas transformações. Temos, uma vez que $|\beta_1| = |\alpha_1| + 1$, que $A_c[\alpha_1 \cup \{k\}|\beta_1]$ e B são matrizes quadradas. Além disso, por transformações elementares sobre a matriz $A[\{k\} \cup \alpha_2|\{k\} \cup \beta_2]$, é possível obter a matriz

$$\left[\begin{array}{c|c} -1 & A_c[\{k\}|\beta_2] \\ \hline 0 & B \end{array} \right].$$

Facilmente se verifica, portanto, que $\det B \geq 0$. Logo, $\det A_c[\alpha|\beta] = \det \tilde{A} = \det A_c[\alpha_1 \cup \{k\}|\beta_1] \det B \leq 0$.

$$(2.3.) \quad |\alpha_1| - |\beta_1| \geq 1$$

É possível substituir certas linhas de $A_c[\alpha|\beta]$ pela sua soma com a $(s+1)$ -ésima linha multiplicada por escalares não nulos adequados e obter uma matriz \bar{A} da forma

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline A_c[\{k\} \cup \alpha_2|\beta_1] & A_c[\{k\} \cup \alpha_2|\beta_2] \end{array} \right].$$

Observe-se que \bar{A} tem uma submatriz $|\alpha_1| \times |\beta_2|$ de zeros. Atendendo ao Lema 3.2, sabemos que $\det \bar{A} = 0$ se $|\alpha_1| + |\beta_2| \geq |\alpha| + 1$. Ora,

$$\begin{aligned} |\alpha_1| + |\beta_2| \geq |\alpha| + 1 &\iff |\alpha_1| + |\beta_2| \geq |\beta_1| + |\beta_2| + 1 \\ &\iff |\alpha_1| - |\beta_1| \geq 1. \end{aligned}$$

Podemos, deste modo, concluir que $\det \bar{A} = 0$ e, portanto, $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

$$(2.4.) \quad |\beta_1| - |\alpha_1| = 0$$

Neste caso, $|\beta_1| = |\alpha_1|$, pelo que os blocos D e $A_c[\{k\} \cup \alpha_2 | \beta_2]$ da matriz \bar{A} do caso anterior são matrizes quadradas. Assim, \bar{A} é uma matriz triangular por blocos cujo determinante coincide com o determinante de $A_c[\alpha | \beta]$ e tal que $\det D \geq 0$. Facilmente se verifica que, nestas condições, $\det A_c[\alpha | \beta] \leq 0$.

$$(3.) \quad k \notin \alpha \text{ e } k \in \beta$$

Neste caso, $t = p + 1$ e $A_c[\alpha | \beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & \dots & -a_{i_1 j_r} & -a_{i_1 k} & -a_{i_1 k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_1 k} a_{k j_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & \dots & -a_{i_s j_r} & -a_{i_s k} & -a_{i_s k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_s k} a_{k j_p} \\ -a_{i_{s+1} k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_{s+1} k} a_{k j_r} & -a_{i_{s+1} k} & -a_{i_{s+1} k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_{s+1} k} a_{k j_p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_t k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_r} & -a_{i_t k} & -a_{i_t k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_p} \end{bmatrix},$$

sendo todo o a_{ij} não negativo.

$$(3.1.) \quad |\beta_1| - |\alpha_1| \geq 1$$

Neste caso, usando transformações elementares sobre colunas adequadas, podemos obter uma matriz \tilde{A} , cujo determinante é igual ao de $A_c[\alpha | \beta]$, da forma

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} B & A_c[\alpha_1 | \{k\} \cup \beta_2] \\ \hline 0 & A_c[\alpha_2 | \{k\} \cup \beta_2] \end{array} \right].$$

Note-se que \tilde{A} tem uma submatriz $|\alpha_2| \times |\beta_1|$ de zeros. Como

$$\begin{aligned} |\alpha_2| + |\beta_1| \geq |\alpha| + 1 & \iff |\alpha_2| + |\beta_1| \geq |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1 \\ & \iff |\beta_1| - |\alpha_1| \geq 1, \end{aligned}$$

podemos afirmar, pelo Lema 3.2, que $\det \tilde{A} = 0$ e, por conseguinte, que também $\det A_c[\alpha | \beta] = 0$.

$$(3.2.) \quad |\beta_1| - |\alpha_1| = 0$$

Note-se que $|\beta_1| = |\alpha_1| = 0$, donde a matriz \tilde{A} , referida no caso anterior, é triangular por blocos. Facilmente se verifica que $\det B \geq 0$. Logo, $\det \tilde{A} \leq 0$ e, portanto, $A_c[\alpha | \beta]$ tem determinante não positivo.

$$(3.3.) \quad |\alpha_1| - |\beta_1| \geq 2$$

Substituindo determinadas colunas de $A_c[\alpha | \beta]$ pela sua soma com a $(r + 1)$ -ésima coluna multiplicada por certos escalares não nulos, obtemos uma matriz

\bar{A} da forma

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_c[\alpha_1|\beta_1 \cup \{k\}] & 0 \\ \hline A_c[\alpha_2|\beta_1 \cup \{k\}] & D \end{array} \right].$$

Observe-se que \bar{A} tem uma submatriz $|\alpha_1| \times |\beta_2|$ de zeros. Pelo Lema 3.2, sabemos que $\det \bar{A} = 0$ se $|\alpha_1| + |\beta_2| \geq |\alpha| + 1$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} |\alpha_1| + |\beta_2| \geq |\alpha| + 1 &\iff |\alpha_1| + |\beta_2| \geq |\beta_1| + |\beta_2| + 1 + 1 \\ &\iff |\alpha_1| - |\beta_1| \geq 2, \end{aligned}$$

podemos concluir que $\det \bar{A} = 0$ e, portanto, $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

$$(3.4.) \quad |\alpha_1| - |\beta_1| = 1$$

Dado que $|\alpha_1| = |\beta_1| + 1$, os blocos $A_c[\alpha_1|\beta_1 \cup \{k\}]$ e D da matriz \bar{A} referida no caso anterior são matrizes quadradas. Por conseguinte, \bar{A} é uma matriz triangular por blocos, com determinante igual ao de $A_c[\alpha|\beta]$. Dado que $\det \bar{A} = \det A_c[\alpha_1|\beta_1 \cup \{k\}] \det D$ e dado que facilmente se comprova que D tem determinante não negativo, podemos afirmar que $\det A_c[\alpha|\beta] \leq 0$.

$$(4.) \quad k \notin \alpha \text{ e } k \notin \beta$$

Neste caso, temos que $t = p$ e que a submatriz $A_c[\alpha|\beta]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & \dots & -a_{i_1 j_r} & -a_{i_1 k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_1 k} a_{k j_t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & \dots & -a_{i_s j_r} & -a_{i_s k} a_{k j_{r+1}} & \dots & -a_{i_s k} a_{k j_t} \\ -a_{i_{s+1} k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_{s+1} k} a_{k j_r} & -a_{i_{s+1} j_{r+1}} & \dots & -a_{i_{s+1} j_t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_t k} a_{k j_1} & \dots & -a_{i_t k} a_{k j_r} & -a_{i_t j_{r+1}} & \dots & -a_{i_t j_t} \end{bmatrix},$$

com $a_{ij} \geq 0$ para todo o i e todo o j .

$$(4.1.) \quad |\beta_1| - |\alpha_1| \geq 2$$

Consideremos, primeiro, o caso em que $a_{i_{s+1}k} = 0$. Nesse caso, o elemento na posição (i_{s+1}, j) de A_c é nulo, para todo o $j \leq k$. Para cada $j > k$, consideremos a submatriz

$$A[\{k, i_{s+1}\}|\{k, j\}] = \begin{bmatrix} -1 & -a_{kj} \\ 0 & -a_{i_{s+1}j} \end{bmatrix}.$$

Sabemos que esta submatriz tem determinante não positivo. Portanto, $a_{i_{s+1}j} = 0$. Assim, a (i_{s+1}) -ésima linha de A_c é, consequentemente, nula. Logo, a $(s+1)$ -ésima linha de $A_c[\alpha|\beta]$ é nula e esta submatriz tem determinante nulo.

Atendamos, agora, ao caso em que $a_{i_{s+1}k} \neq 0$. Para cada $l \in \{s+2, \dots, t\}$ tal que $a_{i_l k} \neq 0$, substituímos a l -ésima linha de $A_c[\alpha|\beta]$ pela sua soma com a

$(s+1)$ -ésima linha multiplicada por $-a_{i_l k} a_{i_{s+1} k}^{-1}$. Obtemos uma matriz da forma

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_c[\alpha_1 \cup \{i_{s+1}\}|\beta_1] & A_c[\alpha_1 \cup \{i_{s+1}\}|\beta_2] \\ \hline 0 & B \end{array} \right],$$

cujo determinante coincide, obviamente, com o de $A_c[\alpha|\beta]$. Note-se que \tilde{A} tem uma submatriz nula $(|\alpha_2| - 1) \times |\beta_1|$. Dado que

$$\begin{aligned} |\alpha_2| - 1 + |\beta_1| \geq |\alpha| + 1 &\iff |\alpha_2| - 1 + |\beta_1| \geq |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1 \\ &\iff |\beta_1| - |\alpha_1| \geq 2, \end{aligned}$$

segue-se que $\det \tilde{A} = 0$ e, por conseguinte, $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

(4.2.) $|\beta_1| - |\alpha_1| = 1$

O caso em que $a_{i_{s+1} k} = 0$ é tratado como no caso anterior.

Atendamos, agora, ao caso em que $a_{i_{s+1} k} \neq 0$ e consideremos as transformações elementares referidas no caso anterior e a matriz \tilde{A} obtida. Observe-se que os blocos $A_c[\alpha_1 \cup \{i_{s+1}\}|\beta_1]$ e B são matrizes quadradas. Portanto, \tilde{A} é uma matriz triangular por blocos, sendo o seu determinante igual ao de $A_c[\alpha|\beta]$. Attendamos, agora, à matriz quadrada

$$A_c[\alpha_2|\{k\} \cup \beta_2] = \left[\begin{array}{c|c} -a_{i_{s+1} k} & A_c[\{i_{s+1}\}|\beta_2] \\ \hline A_c[\alpha_2 - \{i_{s+1}\}|\{k\}] & A_c[\alpha_2 - \{i_{s+1}\}|\beta_2] \end{array} \right].$$

Para cada $l \in \{s+2, \dots, t\}$ tal que $a_{i_l k} \neq 0$, substituímos a $(l-s+1)$ -ésima linha de $A_c[\alpha_2|\{k\} \cup \beta_2]$ pela sua soma com a primeira linha multiplicada por $-a_{i_l k} a_{i_{s+1} k}^{-1}$. Obtemos a matriz

$$C = \left[\begin{array}{c|c} -a_{i_{s+1} k} & A_c[\{i_{s+1}\}|\beta_2] \\ \hline 0 & B \end{array} \right].$$

Dado que $\det C = \det A_c[\alpha_2|\{k\} \cup \beta_2] \leq 0$ e dado que $a_{i_{s+1} k} \neq 0$, podemos concluir que $\det B \geq 0$. Assim, $\det \tilde{A} = \det A_c[\alpha_1 \cup \{i_{s+1}\}|\beta_1] \det B \leq 0$.

(4.3.) $|\alpha_1| - |\beta_1| \geq 2$

Começamos por analisar o caso em que $a_{k j_{r+1}} = 0$. Nesse caso, o elemento na posição (i, j_{r+1}) de A_c é nulo, para qualquer $i \leq k$. Para cada $i > k$, consideremos a submatriz

$$A[\{k, i\}|\{k, j_{r+1}\}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -a_{i k} & -a_{i j_{r+1}} \end{bmatrix}.$$

Dado que o determinante desta submatriz é não positivo, podemos concluir que $a_{i j_{r+1}} = 0$. Assim, a (j_{r+1}) -ésima coluna de A_c é nula e, por conseguinte, a $(r+1)$ -ésima coluna de $A_c[\alpha|\beta]$ é nula. Portanto, $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

Consideremos, agora, o caso em que $a_{kj_{r+1}} \neq 0$. Para cada $l \in \{r+2, \dots, t\}$ tal que $a_{kj_l} \neq 0$, substituímos a l -ésima coluna de $A_c[\alpha|\beta]$ pela sua soma com a $(r+1)$ -ésima coluna multiplicada por $-a_{kj_l}a_{kj_{r+1}}^{-1}$. Obtemos uma matriz \bar{A} , com determinante igual ao de $A_c[\alpha|\beta]$, da forma

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_c[\alpha_1|\beta_1 \cup \{j_{r+1}\}] & 0 \\ \hline A_c[\alpha_2|\beta_1 \cup \{j_{r+1}\}] & D \end{array} \right].$$

Como \bar{A} tem uma submatriz $|\alpha_1| \times (|\beta_2| - 1)$ de zeros, sabemos, pelo Lema 3.2, que $\det \bar{A} = 0$ se $|\alpha_1| + |\beta_2| - 1 \geq |\alpha| + 1$. Atendendo a que

$$\begin{aligned} |\alpha_1| + |\beta_2| - 1 \geq |\alpha| + 1 &\iff |\alpha_1| + |\beta_2| - 1 \geq |\beta_1| + |\beta_2| + 1 \\ &\iff |\alpha_1| - |\beta_1| \geq 2, \end{aligned}$$

podemos concluir que $\det \bar{A} = 0$ e, portanto, $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$.

(4.4.) $|\alpha_1| - |\beta_1| = 1$

O caso em que $a_{kj_{r+1}} = 0$ é tratado como no caso anterior.

Consideremos, então, o caso em que $a_{kj_{r+1}} \neq 0$ e as transformações elementares referidas no caso anterior e a matriz \bar{A} obtida. Note-se que os blocos $A_c[\alpha_1|\beta_1 \cup \{j_{r+1}\}]$ e D são matrizes quadradas, pelo que \bar{A} é uma matriz triangular por blocos com determinante igual ao de $A_c[\alpha|\beta]$. Atendamos, agora, à matriz quadrada

$$A_c[\{k\} \cup \alpha_2|\beta_2] = \left[\begin{array}{c|c} -a_{kj_{r+1}} & A_c[\{k\}|\beta_2 - \{j_{r+1}\}] \\ \hline A_c[\alpha_2|\{j_{r+1}\}] & A_c[\alpha_2|\beta_2 - \{j_{r+1}\}] \end{array} \right].$$

Para cada $l \in \{r+2, \dots, t\}$ tal que $a_{kj_l} \neq 0$, substituímos a $(l - r + 1)$ -ésima coluna de $A_c[\{k\} \cup \alpha_2|\beta_2]$ pela sua soma com a primeira coluna multiplicada por $-a_{kj_l}a_{kj_{r+1}}^{-1}$. Obtemos a matriz

$$E = \left[\begin{array}{c|c} -a_{kj_{r+1}} & 0 \\ \hline A_c[\alpha_2|\{j_{r+1}\}] & D \end{array} \right].$$

Como $\det E \leq 0$ e $a_{kj_{r+1}} \neq 0$, podemos afirmar que $\det D \geq 0$. Logo, $\det \bar{A} = \det A_c[\alpha_1|\beta_1 \cup \{j_{r+1}\}] \det D \leq 0$.

(4.5.) $|\beta_1| - |\alpha_1| = 0$

Neste caso, $r = s$. Consideremos a submatriz $A_c[\alpha \cup \{k\}|\beta \cup \{k\}]$ de A_c e a sua partição

$$A_c[\alpha \cup \{k\}|\beta \cup \{k\}] = \left[\begin{array}{c|c|c} B & u & -uv^T \\ \hline w^T & -1 & v^T \\ \hline -zw^T & z & C \end{array} \right],$$

onde $B = A_c[\alpha_1|\beta_1]$, $u = A_c[\alpha_1|\{k\}]$, $w^T = A_c[\{k\}|\beta_1]$, $v^T = A_c[\{k\}|\beta_2]$, $z = A_c[\alpha_2|\{k\}]$ e $C = A_c[\alpha_2|\beta_2]$. Note-se que

$$A_c[\alpha|\beta] = \left[\begin{array}{c|c} B & -uv^T \\ \hline -zw^T & C \end{array} \right].$$

Admitamos, primeiro, que B é invertível.

Neste caso, sabemos que $\det B < 0$ e $\det C \leq 0$. Atendendo a que

$$\det \left[\begin{array}{cc} B & u \\ w^T & -1 \end{array} \right] \leq 0 \iff \det B \times \det(-1 - w^T B^{-1}u) \leq 0,$$

podemos, então, afirmar que $\lambda = -w^T B^{-1}u \geq 1$.

Além disso, como

$$\det \left[\begin{array}{cc} -1 & v^T \\ z & C \end{array} \right] \leq 0 \iff -1 \times \det(C - z(-1)v^T) \leq 0,$$

sabemos, ainda, que $\det(C + zv^T) \geq 0$.

Atendamos, agora, à submatriz $A_c[\alpha|\beta]$. Temos que

$$\begin{aligned} \det \left[\begin{array}{cc} B & -uv^T \\ -zw^T & C \end{array} \right] &= \det B \det(C - zw^T B^{-1}uv^T) \\ &= \det B \det(C + \lambda zv^T). \end{aligned}$$

Pretendemos mostrar que $\det(C + \lambda zv^T) \geq 0$. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$. Note-se que $r(zv^T) = 1$. C e zv^T são matrizes de ordem $m = t - s$. Por uma questão de simplificação de escrita, denotemos por c_{ij} e por b_{ij} os elementos de C e de zv^T , respectivamente. Isto é, $C = (c_{ij})_{i,j=1}^m$ e $zv^T = (b_{ij})_{i,j=1}^m$.

Recorrendo a propriedades dos determinantes, temos que

$$\det(C + \gamma zv^T) = \det C + \gamma M,$$

onde

$$M = \det \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ b_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{array} \right] + \dots + \det \left[\begin{array}{cccc} c_{11} & \dots & c_{1m-1} & b_{1m} \\ c_{21} & \dots & c_{2m-1} & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mm-1} & b_{mm} \end{array} \right].$$

Para $\gamma = 1$, temos que

$$\det(C + \gamma zv^T) = \det(C + zv^T) \geq 0.$$

Logo,

$$M \geq -\det C \geq 0.$$

Para $\gamma = \lambda$, temos que

$$\det(C + \gamma z v^T) = \det(C + \lambda z v^T) = \det C + \lambda M.$$

Assim,

$$\det(C + \lambda z v^T) \geq 0 \iff \lambda M \geq -\det C.$$

Como $\lambda \geq 1$ e $M \geq 0$, segue-se que

$$\lambda M \geq M \geq -\det C.$$

Logo, se B é invertível, $\det A_c[\alpha|\beta] \leq 0$.

Resta-nos, portanto, estudar o caso em que B não é invertível.

Sabemos, nesse caso, que uma coluna de B é combinação linear das restantes, ou seja, existe $h \in \{1, \dots, s\}$ tal que

$$-a_{ij_h} = \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (-\xi_l a_{il}),$$

para todo o $i \in \{i_1, \dots, i_s\}$.

Por um lado, consideremos a matriz $A_c[\alpha_1 \cup \{k\} | \beta_1 \cup \{k\}]$. O seu determinante, não positivo, é dado por

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & -a_{i_1 j_2} & \dots & \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (-\xi_l a_{i_1 l}) & \dots & -a_{i_1 j_s} & -a_{i_1 k} \\ -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (-\xi_l a_{i_2 l}) & \dots & -a_{i_2 j_s} & -a_{i_2 k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & -a_{i_s j_2} & \dots & \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (-\xi_l a_{i_s l}) & \dots & -a_{i_s j_s} & -a_{i_s k} \\ -a_{k j_1} & -a_{k j_2} & \dots & -a_{k j_h} & \dots & -a_{k j_s} & -1 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} -a_{i_1 j_1} & -a_{i_1 j_2} & \dots & 0 & \dots & -a_{i_1 j_s} & -a_{i_1 k} \\ -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & 0 & \dots & -a_{i_2 j_s} & -a_{i_2 k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & -a_{i_s j_2} & \dots & 0 & \dots & -a_{i_s j_s} & -a_{i_s k} \\ -a_{k j_1} & -a_{k j_2} & \dots & -a_{k j_h} + \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}) & \dots & -a_{k j_s} & -1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{s+1+h} \times \left(-a_{k j_h} + \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}) \right) \times \det A_c[\alpha_1 | (\beta_1 - \{j_h\}) \cup \{k\}]. \end{aligned}$$

Logo,

$$(-1)^{s+1+h} \times \left(-a_{kj_h} + \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}) \right) \geq 0.$$

Por outro lado, consideremos a submatriz $A_c[(\alpha_1 - \{i_1\}) \cup \{k\} | \beta_1]$ de A_c . O seu determinante, não positivo, é dado por

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (-\xi_l a_{i_2 l}) & \dots & -a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & -a_{i_s j_2} & \dots & \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (-\xi_l a_{i_s l}) & \dots & -a_{i_s j_s} \\ -a_{k j_1} & -a_{k j_2} & \dots & -a_{k j_h} & \dots & -a_{k j_s} \end{bmatrix} \\ = & \det \begin{bmatrix} -a_{i_2 j_1} & -a_{i_2 j_2} & \dots & 0 & \dots & -a_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{i_s j_1} & -a_{i_s j_2} & \dots & 0 & \dots & -a_{i_s j_s} \\ -a_{k j_1} & -a_{k j_2} & \dots & -a_{k j_h} + \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}) & \dots & -a_{k j_s} \end{bmatrix} \\ = & (-1)^{s+h} \times \left(-a_{kj_h} + \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}) \right) \times \det A_c[(\alpha_1 - \{i_1\}) | (\beta_1 - \{j_h\})]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(-1)^{s+h} \times \left(-a_{kj_h} + \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}) \right) \geq 0.$$

Podemos, deste modo, concluir que

$$-a_{kj_h} + \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}) = 0,$$

ou seja,

$$a_{kj_h} = \sum_{l \in (\{j_1, \dots, j_s\} - \{j_h\})} (\xi_l a_{kl}).$$

Assim, a h -ésima coluna de

$$\begin{bmatrix} B \\ -zw^T \end{bmatrix}$$

é combinação linear das restantes. Portanto,

$$r \left(\begin{bmatrix} B \\ -zw^T \end{bmatrix} \right) < |\alpha_1|$$

e, por conseguinte,

$$r\left(\begin{bmatrix} B & -uv^T \\ -zw^T & C \end{bmatrix}\right) < |\alpha_1| + |\alpha_2| = \alpha.$$

Logo, $\det A_c[\alpha|\beta] = 0$. □

Podemos generalizar este resultado do seguinte modo:

Teorema 3.1. *Seja G um grafo não dirigido 1-cordal monotonaemente etiquetado e conexo. Toda a TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é G e cujas entradas correspondentes aos vértices separadores minimais são não nulas admite TNP -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução no número de cliques maximais.

Admitamos que o resultado é válido para grafos 1-cordais monotonaemente etiquetados, conexos, com $p - 1$ cliques maximais e seja A uma TNP -matriz parcial cujo grafo associado é 1-cordal monotonaemente etiquetado, conexo, com p cliques maximais K_1, K_2, \dots, K_p e tal que todas as entradas correspondentes a vértices separadores minimais são não nulas.

A submatriz principal $A_{K_1 \cup K_2}$, determinada pelos cliques maximais K_1 e K_2 , é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas prescritas é 1-cordal monotonaemente etiquetado, conexo, com dois cliques maximais. Pela Proposição 3.3, $A_{K_1 \cup K_2}$ admite um TNP -completamento $A_{K_1 \cup K_2 c}$.

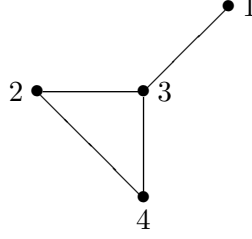
Seja \bar{A} a matriz parcial obtida de A completando $A_{K_1 \cup K_2}$ como em $A_{K_1 \cup K_2 c}$. \bar{A} é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal monotonaemente etiquetado, conexo, com $p - 1$ cliques maximais. Pela hipótese de indução, \bar{A} admite um TNP -completamento. Por conseguinte, também A admite um TNP -completamento. □

Apresentamos, de seguida, um exemplo de uma TNP -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal não monotonaemente etiquetado com dois cliques maximais e cuja entrada correspondente ao vértice separador minimal é não nula, que não admite TNP -completamentos.

Exemplo 3.3. Consideremos a matriz parcial

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & ? & -2 & ? \\ ? & -1 & -4 & -8 \\ -1 & -5 & -1 & -2 \\ ? & -10 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

cujo grafo das entradas especificadas é



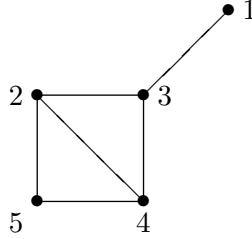
Observe-se que o grafo é 1-cordal, mas não monotonamente etiquetado. Facilmente se verifica que A_1 é uma TNP -matriz parcial. Vejamos que A_1 não admite TNP -completamentos. Dados $x \in \mathbb{R}^+$ e um completamento A_{1_c} de A_1 cuja entrada $(1, 2)$ é $-x$, simples cálculos mostram que $\det A_{1_c} [\{1, 2\}|\{2, 3\}] = 4x - 2$ e $\det A_{1_c} [\{1, 3\}|\{1, 2\}] = 5 - x$. Assim, esses menores são ambos não positivos se e somente se $x \leq 0.5$ e $x \geq 5$, o que é impossível. Logo, A_1 não admite TNP -completamentos.

Facilmente se obtém, com base no exemplo anterior, um exemplo de uma TNP -matriz parcial cujo grafo associado é 2-cordal, não monotonamente etiquetado, que não admite TNP -completamentos.

Exemplo 3.4. Consideremos a matriz parcial

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & ? & -2 & ? & ? \\ ? & -1 & -4 & -8 & -8 \\ -1 & -5 & -1 & -2 & ? \\ ? & -10 & -2 & -1 & -1 \\ ? & -10 & ? & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

cujo grafo das entradas especificadas é



Facilmente se verifica que A_2 é uma TNP -matriz parcial. Note-se que a submatriz principal $A_2 [\{1, 2, 3, 4\}]$ de A_2 é a matriz parcial A_1 do exemplo anterior. Obviamente, como A_1 não admite TNP -completamentos, também A_2 não admite TNP -completamentos.

Este último exemplo permite-nos construir uma família de grafos p -cordais não monotonamente etiquetados que não admitem TNP -completamentos. A ideia é bastante simples: para $p = 3$, consideramos o grafo $G_p = (V, E)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, cujo subgrafo induzido por $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ é o grafo associado à matriz parcial A_2 do exemplo anterior e tal que o arco $(i, 6)$ pertence a E , para

todo o $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Note-se que os cliques maximais de G_p são, exactamente, $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$ e $\{2, 4, 5, 6\}$. G_p é, portanto, um grafo 3-cordal. Consideremos a matriz parcial A_p , 6×6 , cujos elementos da diagonal principal são todos especificados e iguais a -1 , tal que $A_p[\{1, 2, 3, 4, 5\}] = A_2$ e tal que os elementos nas posições $(i, 6)$ e $(6, i)$ são iguais aos elementos nas posições $(i, 4)$ e $(4, i)$, respectivamente, para cada $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, sendo as restantes entradas não especificadas. Facilmente se verifica que A_p é uma *TNP*-matriz parcial cujo grafo associado é G_p . Dado que a submatriz $A_p[\{1, 2, 3, 4, 5\}]$ de A_p é a matriz parcial A_2 do exemplo anterior, podemos concluir que A_p não admite *TNP*-completamentos e, por conseguinte, G_p não admite *TNP*-completamentos.

Em geral, para $p > 3$, consideremos o grafo $G_p = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \dots, p+3\}$, cujo subgrafo induzido por $\{1, 2, \dots, p+2\}$ é o grafo associado à matriz parcial A_{p-1} e tal que o arco $(i, p+3)$ pertence a E , para qualquer i pertencente a $\{2, \dots, p+2\}$. Observe-se que os cliques maximais de G_p são $\{1, 3\}$, $\{2, 3, 4, 6, \dots, p+3\}$ e $\{2, 4, 5, 6, \dots, p+3\}$, donde G_p é um grafo p -cordal. Consideremos a matriz parcial A_p , $(p+3) \times (p+3)$, cujos elementos da diagonal principal são todos prescritos e iguais a -1 , tal que $A_p[\{1, \dots, p+2\}] = A_{p-1}$ e tal que os elementos nas posições $(i, p+3)$ e $(p+3, i)$ são iguais aos elementos nas posições $(i, p+2)$ e $(p+2, i)$, respectivamente, para cada $i \in \{2, \dots, p+2\}$, sendo as restantes entradas não prescritas. A_p é, assim, uma *TNP*-matriz parcial cujo grafo associado é G_p . Como a submatriz $A_p[\{1, \dots, p+2\}]$ de A_p não admite *TNP*-completamentos, também A_p não admite *TNP*-matrizes como completamentos. Portanto, G_p não admite *TNP*-completamentos.

O problema de completamento de *TNP*-matrizes parciais cujo grafo das entradas especificadas é p -cordal monotonamente etiquetado, com $p \geq 2$, é, ainda, uma questão em aberto.

O caso mais básico dos grafos 2-cordais é o duplo triângulo. Nos resultados que se seguem, consideramos o problema de completamento em questão para o caso das *TNP*-matrizes parciais cujos grafos das entradas especificadas são duplos triângulos monotonamente etiquetados e cujos elementos da diagonal principal são não nulos. A morosidade deste estudo revela a dificuldade de tratar o caso mais geral.

Lema 3.3. *Seja A uma *TNP*-matriz parcial da forma*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -a_{13} & ? \\ -a_{21} & -1 & -1 & -a_{24} \\ -a_{31} & -1 & -1 & -1 \\ ? & -a_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

*onde cada a_{ij} é positivo. Então, A admite *TNP*-completamentos.*

Demonstração. Para que A seja uma TNP -matriz parcial, os determinantes das submatrizes $A[\{1, 2, 3\}]$ e $A[\{2, 3, 4\}]$ têm de ser não positivos. Temos, então, que $a_{31} = a_{21}$ ou $a_{13} = 1$ e que $a_{42} = a_{43}$ ou $a_{24} = 1$. Em qualquer um destes casos, não é difícil de comprovar que

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -a_{13} & -a_{13}a_{24} \\ -a_{21} & -1 & -1 & -a_{24} \\ -a_{31} & -1 & -1 & -1 \\ -a_{31}a_{42} & -a_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix}$$

é um TNP -completamento de A . \square

Note-se que se A é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é um duplo triângulo monotonamente etiquetado, então podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -a_{13} & ? \\ -a_{21} & -1 & -1 & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -1 & -1 \\ ? & -a_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é positivo. Atendendo ao resultado anterior, sabemos que se o vértice separador minimal é não invertível, então existe um TNP -completamento de A .

Atendamos, agora, ao caso em que o vértice separador minimal é invertível, ou seja, ao caso em que $a_{32} > 1$. O seguinte lema permitir-nos-á garantir a existência do completamento desejado também neste caso.

Lema 3.4. *Consideremos a TNP -matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -a_{13} & ? \\ -a_{21} & -1 & -1 & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -1 & -1 \\ ? & -a_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é positivo, sendo $a_{32} > 1$. Então, a matriz parcial B obtida de A completando a entrada da posição $(4, 1)$ com $-a_{31}a_{42}a_{32}^{-1}$ é, também, uma TNP -matriz parcial.

Demonstração. É fácil de verificar que todos os menores correspondentes a submatrizes de ordem 2 totalmente especificadas são não positivos.

Atendamos, então, às submatrizes de ordem 3. Sendo A uma TNP -matriz parcial, sabemos que $\det A[\{1, 2, 3\}]$ e $\det A[\{2, 3, 4\}]$ são não positivos. Logo, $\det B[\{1, 2, 3\}]$ e $\det B[\{2, 3, 4\}]$ são, também, não positivos.

Para as restantes submatrizes 3×3 totalmente especificadas, temos que

$$\det B [\{1, 2, 4\}|\{1, 2, 3\}] = a_{42}a_{32}^{-1} \det B [\{1, 2, 3\}] + (a_{42} - a_{32}a_{43})(1 - a_{21})a_{32}^{-1},$$

$$\det B [\{1, 3, 4\}|\{1, 2, 3\}] = (a_{31} - a_{32})(a_{32}a_{43} - a_{42})a_{32}^{-1},$$

$$\det B [\{2, 3, 4\}|\{1, 2, 3\}] = (a_{42} - a_{32}a_{43})(a_{21}a_{32} - a_{31})a_{32}^{-1},$$

$$\det B [\{2, 3, 4\}|\{1, 2, 4\}] = (a_{42} - a_{32})(a_{21}a_{32} - a_{31})a_{32}^{-1}$$

e

$$\det B [\{2, 3, 4\}|\{1, 3, 4\}] = a_{31}a_{32}^{-1} \det B [\{2, 3, 4\}] + (a_{31} - a_{21}a_{32})(1 - a_{43})a_{32}^{-1}.$$

Facilmente se verifica que todos estes menores são não positivos. Portanto, B é uma TNP -matriz parcial. \square

Consideremos duas TNP -matrizes parciais A e B como no enunciado do resultado anterior. Obviamente, se mostrarmos que existe um TNP -completamento B_c de B , poderemos concluir que existe um TNP -completamento $A_c = B_c$ de A . Tendo em conta o completamento obtido no caso em que o vértice separador minimal é não invertível, parece lógico pensar que a matriz

$$B_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -a_{13} & -a_{13}a_{24} \\ -a_{21} & -1 & -1 & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -1 & -1 \\ -a_{31}a_{42}a_{32}^{-1} & -a_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix}$$

é um TNP -completamento de B . Facilmente se verifica este facto quando $a_{13} = 1$ ou $a_{24} = 1$. No entanto, como o seguinte exemplo ilustra, um completamento deste tipo não é, em geral, uma TNP -matriz.

Exemplo 3.5. Consideremos a seguinte TNP -matriz parcial

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & ? \\ -2 & -1 & -1 & -3 \\ -7 & -3 & -1 & -1 \\ -49/3 & -7 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

O completamento

$$B_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & -6 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \\ -7 & -3 & -1 & -1 \\ -49/3 & -7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

de B não é uma TNP -matriz, uma vez que $\det B_c = 1/3 > 0$.

Concluimos, no lema que se segue, o estudo deste caso mais básico dos grafos 2-cordais monotonamente etiquetados.

Lema 3.5. *Seja B uma TNP-matriz parcial da forma*

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -a_{13} & ? \\ -a_{21} & -1 & -1 & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -1 & -1 \\ -a_{31}a_{42}a_{32}^{-1} & -a_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é positivo, sendo $a_{32} > 1$. Consideremos a sua partição

$$B = \left[\begin{array}{c|cc|c} -1 & -1 & -a_{13} & ? \\ \hline -a_{21} & -1 & -1 & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -1 & -1 \\ \hline -a_{31}a_{42}a_{32}^{-1} & -a_{42} & -a_{43} & -1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc|c} -1 & A_{12} & ? \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline -a_{31}a_{42}a_{32}^{-1} & A_{32} & -1 \end{array} \right].$$

Então,

$$B_c = \left[\begin{array}{c|cc|c} -1 & A_{12} & A_{12}A_{22}^{-1}A_{23} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline -a_{31}a_{42}a_{32}^{-1} & A_{32} & -1 \end{array} \right]$$

é um TNP-completamento de B .

Demonstração. É imediato comprovar que todos os menores relativos a submatrizes de ordem 2 são não positivos. Além disso, sabemos, ainda, que

$$\det B_c [\alpha | \{1, 2, 3\}] = \det B [\alpha | \{1, 2, 3\}],$$

para todo o $\alpha \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, e

$$\det B_c [\{2, 3, 4\} | \beta] = \det B [\{2, 3, 4\} | \beta],$$

para todos o $\beta \in \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$. Por outro lado, é fácil de comprovar que

$$\det B_c = \frac{\det B [\{1, 2, 3\}] \det B [\{2, 3, 4\}]}{\det B [\{2, 3\}]} \leq 0.$$

Para $\alpha = \{1, 2, 3\}$, temos que

$$\det B_c [\alpha | \{1, 2, 4\}] = (a_{32} - 1)^{-1} (a_{24}a_{32} - 1) \det B [\alpha],$$

$$\det B_c [\alpha | \{1, 3, 4\}] = (a_{32} - 1)^{-1} (a_{24} - 1) \det B [\alpha]$$

e

$$\det B_c [\alpha | \{2, 3, 4\}] = 0.$$

Para $\alpha = \{1, 2, 4\}$, prova-se que

$$\det B_c[\alpha] = a_{42}a_{32}^{-1} \det B_c[\{1, 2, 3\}|\{1, 2, 4\}] + a_{32}^{-1}(a_{42} - a_{32})(1 - a_{21}),$$

$$\begin{aligned} \det B_c[\alpha|\{1, 3, 4\}] &= a_{42}a_{32}^{-1} \det B_c[\{1, 2, 3\}|\{1, 3, 4\}] \\ &\quad + (a_{32} - a_{32}^2)^{-1}(a_{32}a_{43} - a_{42})(a_{24} - 1)(1 - a_{21}) \\ &\quad + (1 - a_{32})^{-1}(1 - a_{13}a_{21}) \det B[\{2, 3, 4\}] \end{aligned}$$

e

$$\det B_c[\alpha|\{2, 3, 4\}] = (a_{32} - 1)^{-1}(a_{13} - 1) \det B_c[\{2, 3, 4\}].$$

Para $\alpha = \{1, 3, 4\}$, temos que

$$\det B_c[\alpha|\{1, 2, 4\}] = a_{32}^{-1}(a_{32} - a_{42})(a_{31} - a_{32}),$$

$$\det B_c[\alpha] = a_{31}a_{32}^{-1} \det B_c[\alpha|\{2, 3, 4\}] + a_{32}^{-1}(a_{31} - a_{32})(1 - a_{43})$$

e

$$\det B_c[\alpha|\{2, 3, 4\}] = (a_{32} - 1)^{-1}(a_{13}a_{32} - 1) \det B[\{2, 3, 4\}].$$

Podemos, assim, concluir, facilmente, que todos os menores de B_c são não positivos. Portanto, a matriz B_c é um TNP -completamento de B e, por conseguinte, de A . \square

Voltemos ao grupo mais básico dos grafos cordais e a um seu caso particular. Como já referimos, um caminho é um caso particular dos grafos 1-cordais. Dado um caminho $\Gamma : \{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{k-1}, i_k\}$, dizemos que Γ é *monotonamente etiquetado* se $i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k$ ou $i_1 > i_2 > \dots > i_{k-1} > i_k$.

Como podemos comprovar no exemplo que se segue, nem toda a TNP -matriz parcial cujo grafo associado é um caminho monotonamente etiquetado admite um TNP -completamento.

Exemplo 3.6. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? \\ -1 & 0 & -1 \\ ? & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que A é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é um caminho monotonamente etiquetado de ordem 3. Dado um qualquer completamento A_c de A , $\det A_c[\{1, 2\}|\{2, 3\}] = 1 > 0$. Portanto, A_c não é uma TNP -matriz. Podemos, pois, afirmar que A não admite TNP -completamentos.

Obviamente, tendo em atenção o Teorema 3.1, se $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é um caminho monotona-mente etiquetado e tal que $a_{22}, \dots, a_{n-1,n-1} \neq 0$, então A admite TNP -com-pletamentos.

Tendo em conta a restrição considerada respeitante às entradas de sobre-posição dos cliques maximais, uma questão que surge naturalmente prende-se com a completabilidade dos chamados caminhos monotona-mente etiquetados quando pelo menos uma dessas entradas de sobreposição é nula. Uma breve análise dos casos mais básicos traduz claramente a morosidade e a dificuldade de encontrar respostas para essa tal questão.

Lema 3.6. *Uma TNP -matriz parcial A da forma*

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ? \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ ? & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é não negativo, admite um TNP -completamento se e só se se verificam as seguintes condições:

- i. $a_{22} = 0 \Rightarrow a_{12}a_{23} = a_{21}a_{32} = 0$;
- ii. $a_{22} = a_{23} = a_{32} = 0 \Rightarrow a_{12}a_{33} = a_{21}a_{33} = 0$;
- iii. $a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0 \Rightarrow a_{23}a_{11} = a_{32}a_{11} = 0$.

Demonstração. Vejamos que as condições enunciadas são condições necessárias para a existência do completamento desejado.

Admitamos, então, que existe um TNP -completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -b \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -c & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix},$$

de A , sendo b e c reais não negativos.

Se $a_{22} = 0$, temos que $\det A_c[\{1, 2\}|\{2, 3\}] = a_{12}a_{23}$ e $\det A_c[\{2, 3\}|\{1, 2\}] = a_{21}a_{32}$. Para que estes menores sejam ambos não positivos, é, claramente, ne-cessário que $a_{12}a_{23} = a_{21}a_{32} = 0$.

Se a_{22}, a_{23}, a_{32} são todos nulos, então $\det A_c[\{2, 3\}|\{1, 3\}] = a_{21}a_{33}$ e $\det A_c[\{1, 3\}|\{2, 3\}] = a_{12}a_{33}$. Atendendo a que estes menores são não positi-vos, segue-se que $a_{12}a_{33} = a_{21}a_{33} = 0$.

Se $a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$, $\det A_c[\{1, 3\}|\{1, 2\}] = a_{11}a_{32}$ e $\det A_c[\{1, 2\}|\{1, 3\}] = a_{11}a_{23}$. Assim, estes determinantes são simultaneamente não positivos se e so-mente se $a_{11}a_{23} = a_{11}a_{32} = 0$.

Vimos, deste modo, que as condições *i* – *iii* são necessárias. Mostremos que são também condições suficientes para garantir a existência do completamento desejado.

Consideremos, então, uma *TNP*–matriz parcial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ cujo grafo associado é um caminho monotonamente etiquetado. A é da forma enunciada.

Se $a_{22} \neq 0$, então

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{12}a_{23}a_{22}^{-1} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{21}a_{32}a_{22}^{-1} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

é um *TNP*–completamento de A .

Admitamos, agora, que $a_{22} = 0$. Neste caso, sabemos, por *i*, que $a_{12}a_{23} = a_{21}a_{32} = 0$. Dados $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, consideremos o completamento

$$A_{x,y} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -x \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -y & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

de A .

Se $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = 0$, então $A_{x,y}$ é um *TNP*–completamento de A para quaisquer x, y tais que $xy \geq a_{11}a_{33}$.

Se pelo menos um dos elementos a_{12} ou a_{21} é não nulo e se $a_{23} = a_{32} = 0$, sabemos, por *ii*, que $a_{33} = 0$. Facilmente se verifica, nestas condições, que $A_{x,y}$ é um *TNP*–completamento para quaisquer x e y .

No caso em que pelo menos um dos elementos a_{23} ou a_{32} é não nulo e em que $a_{12} = a_{21} = 0$, sabemos, por *iii*, que $a_{11} = 0$. É fácil de comprovar que, neste caso, $A_{x,y}$ é um *TNP*–completamento para quaisquer x e y .

Consideremos, agora, o caso em que $a_{12}a_{32} \neq 0$ e $a_{21} = a_{23} = 0$. Sejam $x = a_{12}a_{33}a_{32}^{-1}$ e $y = a_{11}a_{32}a_{12}^{-1}$. Simples cálculos permitem-nos afirmar que $A_{x,y}$ é uma *TNP*–matriz.

Por fim, quando a_{21} e a_{23} são não nulos e $a_{12} = a_{32} = 0$, facilmente se verifica que $A_{x,y}$ é um *TNP*–completamento para $x = a_{11}a_{23}a_{21}^{-1}$ e $y = a_{21}a_{33}a_{23}^{-1}$. \square

Como o exemplo que se segue ilustra, as condições descritas no lema anterior e exigidas para cada caminho monotonamente etiquetado de ordem 3 não são, em geral, condições suficientes para garantir a existência do completamento desejado.

Exemplo 3.7. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? & ? \\ -1 & 0 & 0 & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que A é uma TNP -matriz parcial e que os caminhos monotonaemente etiquetados de ordem 3 que G_A contém, como subgrafos induzidos, são os caminhos $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ e $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$. A verificação de que A satisfaz as condições do lema anterior relativas a cada caminho de ordem 3 é simples. Vejamos, agora, que A não admite TNP -completamentos. Seja

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -c_{13} & -c_{14} \\ -1 & 0 & 0 & -c_{24} \\ -c_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{41} & -c_{42} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

um completamento de A tal que cada c_{ij} é não negativo. Temos que

$$\det A_c [\{1, 2\}|\{2, 4\}] \leq 0 \Leftrightarrow c_{24} = 0.$$

Mas, se $c_{24} = 0$, então

$$\det A_c [\{2, 4\}|\{1, 4\}] = 1$$

e A_c não é uma TNP -matriz.

Analiseemos, agora, o problema em questão para o caso em que A é uma TNP -matriz parcial 4×4 cujo grafo associado G_A é um caminho monotonaemente etiquetado. Como podemos comprovar no exemplo anterior, não é suficiente que as submatrizes principais associadas aos caminhos monotonaemente etiquetados de ordem 3 em G_A admitam TNP -completamentos.

Lema 3.7. *Seja A uma TNP -matriz parcial da forma*

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ? & ? \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & ? \\ ? & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ ? & ? & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix},$$

sendo cada a_{ij} não negativo. Então, A admite TNP -completamentos se e somente se $A[\{1, 2, 3\}]$ e $A[\{2, 3, 4\}]$ admitem TNP -completamentos e A satisfaz as condições que se seguem:

- i. $a_{12}a_{34} \neq 0 \Rightarrow a_{32} \neq 0$;
- ii. $a_{21}a_{43} \neq 0 \Rightarrow a_{23} \neq 0$;
- iii. $a_{22} = 0$ e $a_{12}a_{21} \neq 0 \Rightarrow a_{44} = 0$;
- iv. $a_{33} = 0$ e $a_{34}a_{43} \neq 0 \Rightarrow a_{11} = 0$.

Demonstração. Começemos por mostrar que as condições referidas são necessárias para a existência de um TNP -completamento de A . Para tal, admitamos que existe um TNP -completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -c_{13} & -c_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -c_{24} \\ -c_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -c_{41} & -c_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix}$$

de A , sendo cada c_{ij} não negativo.

Obviamente, $A_c[\{1, 2, 3\}]$ é um TNP -completamento da TNP -matriz parcial $A[\{1, 2, 3\}]$ e $A_c[\{2, 3, 4\}]$ é um TNP -completamento da submatriz principal $A[\{2, 3, 4\}]$. Note-se que os caminhos monotonaemente etiquetados de ordem 3 que o grafo associado a A , G_A , contém são os caminhos $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ e $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$.

Suponhamos que $a_{12}a_{34} \neq 0$ e $a_{32} = 0$. Então, $\det A_c[\{1, 3\}|\{2, 4\}] > 0$, o que contradiz o facto de A_c ser uma TNP -matriz. Logo, se $a_{12}a_{34} \neq 0$, temos $a_{32} \neq 0$.

Admitamos que $a_{21}a_{43} \neq 0$. Se $a_{23} = 0$, então $\det A_c[\{2, 4\}|\{1, 3\}] > 0$. Portanto, também a_{23} é não nulo.

Assumamos que $a_{22} = 0$ e $a_{12}a_{21} \neq 0$. Temos, então, que

$$\det A_c[\{1, 2\}|\{2, 4\}] = a_{12}c_{24} \leq 0 \Leftrightarrow c_{24} = 0.$$

Assim, para que o menor $\det A_c[\{2, 4\}|\{1, 4\}]$ seja não positivo, é necessário que a_{44} seja nulo.

Suponhamos, agora, que $a_{33} = 0$ e $a_{34}a_{43} \neq 0$. Nesse caso,

$$\det A_c[\{3, 4\}|\{1, 3\}] = c_{31}a_{43} \leq 0 \Leftrightarrow c_{31} = 0.$$

Portanto, para que $A_c[\{1, 3\}|\{1, 4\}]$ tenha determinante não positivo, é necessário que a_{11} seja nulo.

Acabámos de mostrar, deste modo, que as condições enunciadas são necessárias. Vejamos, de seguida, que são também suficientes. Admitamos, então, que A é tal que se verificam as condições enunciadas.

Se $a_{22} \neq 0$, podemos completar a submatriz principal $A[\{2, 3, 4\}]$ de forma a obter uma TNP -matriz. Obtemos, deste modo, uma TNP -matriz parcial cujo grafo associado é um grafo 1-cordal, sendo a entrada de sobreposição não nula. Pelo Teorema 3.1, podemos garantir a existência de um TNP -completamento desta matriz parcial que é, também, um completamento de A . Se $a_{33} \neq 0$, podemos seguir um procedimento análogo. Completamos a submatriz principal $A[\{1, 2, 3\}]$ de forma a obter uma TNP -matriz. Obtemos, uma vez mais, uma

TNP -matriz parcial cujo grafo associado é um grafo 1-cordal, cuja entrada de sobreposição é não nula. Assim, pelo Teorema 3.1, existe um TNP -completamento desta matriz parcial e, por conseguinte, de A .

Consideremos, então, o caso em que $a_{22} = a_{33} = 0$. Atendendo ao Lema 3.6, sabemos que $a_{12}a_{23} = a_{21}a_{32} = a_{23}a_{34} = a_{32}a_{43} = 0$.

Tendo ainda em conta as restantes condições enunciadas, temos os seguintes casos:

(a) $a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{34} = a_{43} = 0$

Neste caso, é fácil de verificar que existem $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ tais que

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 & -a_{44} \end{bmatrix}$$

é um TNP -completamento de A .

(b) $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = 0$ e pelo menos um dos elementos a_{23} ou a_{32} é não nulo

Atendendo ao Lema 3.6, sabemos que $a_{11} = a_{44} = 0$. Neste caso, A_0 é uma TNP -matriz.

(c) $a_{34}a_{43} = 0$, pelo menos um dos elementos a_{12} ou a_{21} é não nulo, pelo menos um dos elementos a_{23} ou a_{32} é nulo, sendo dois destes últimos 4 elementos não nulos

Neste caso, sabemos, pelo Lema 3.6 e pela condição *iii*, que $a_{44} = 0$.

Se $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ são tais que $a_{11}a_{23} - a_{21}x \leq 0$ e $a_{11}a_{32} - a_{12}y \leq 0$, então

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -x & 0 \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & 0 \\ -y & -a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é um TNP -completamento de A . Mostremos que existem tais x e y .

Se $a_{21} \neq 0$, escolhemos $x \geq a_{11}a_{23}a_{21}^{-1}$ e se $a_{12} \neq 0$, escolhemos $y \geq a_{11}a_{32}a_{12}^{-1}$.

Se $a_{21} = 0$, então $a_{12} \neq 0$ e $a_{23} = 0$. Podemos, então, escolher um valor arbitrário para x .

Se $a_{12} = 0$, segue-se que $a_{21} \neq 0$ e $a_{32} = 0$. Nesse caso, podemos, assim, escolher um valor arbitrário para y .

(d) $a_{12}a_{21} = 0$, pelo menos um dos elementos a_{34} ou a_{43} é não nulo, pelo menos um dos elementos a_{23} ou a_{32} é nulo, sendo dois destes últimos 4 elementos não nulos

Atendendo ao Lema 3.6 e à condição *iv*, temos que $a_{11} = 0$. Se $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ são tais que $a_{44}a_{23} - a_{43}x \leq 0$ e $a_{44}a_{32} - a_{34}y \leq 0$, então

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{23} & -x \\ 0 & -a_{32} & 0 & -a_{34} \\ 0 & -y & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix}$$

é uma *TNP*-matriz. Seguindo um raciocínio análogo ao do caso anterior, prova-se que tais x e y existem.

(e) $a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{34} = 0$ e pelo menos um dos elementos a_{12} ou a_{43} é não nulo

Neste caso, prova-se que

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{43} & -a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix}$$

é um *TNP*-complemento de A .

(f) $a_{12} = a_{23} = a_{32} = a_{43} = 0$ e pelo menos um dos elementos a_{21} ou a_{34} é não nulo

Facilmente se verifica que

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & 0 & -a_{11} \\ -a_{21} & 0 & 0 & -a_{21} \\ -a_{34} & 0 & 0 & -a_{34} \\ -a_{44} & 0 & 0 & -a_{44} \end{bmatrix}$$

é um *TNP*-complemento de A .

(g) $a_{21} = a_{23} = a_{43} = 0$ e $a_{12}a_{32}a_{34} \neq 0$

Simples cálculos permitem-nos concluir que

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 & -a_{12}a_{34}a_{32}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}a_{32}a_{12}^{-1} & -a_{32} & 0 & -a_{34} \\ -a_{11}a_{32}a_{44}a_{12}^{-1}a_{34}^{-1} & a_{32}a_{44}a_{34}^{-1} & 0 & -a_{44} \end{bmatrix}$$

é uma TNP -matriz.

(h) $a_{12} = a_{32} = a_{34} = 0$ e $a_{21}a_{23}a_{43} \neq 0$

É fácil de comprovar que

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{11}a_{23}a_{21}^{-1} & -a_{11}a_{23}a_{44}a_{21}^{-1}a_{43}^{-1} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & -a_{23}a_{44}a_{43}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21}a_{43}a_{23}^{-1} & 0 & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix}$$

é um TNP -complemento de A . \square

Este tipo de estudo pode, obviamente, ser desenvolvido recursivamente. Para os caminhos de ordem 5, prova-se o seguinte resultado.

Lema 3.8. *Seja A uma TNP -matriz parcial da forma*

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ? & ? & ? \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & ? & ? \\ ? & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} & ? \\ ? & ? & -a_{43} & -a_{44} & -a_{45} \\ ? & ? & ? & -a_{54} & -a_{55} \end{bmatrix},$$

sendo cada a_{ij} não negativo. Então, A admite TNP -complementos se e só se $A[\{1, 2, 3, 4\}]$ e $A[\{2, 3, 4, 5\}]$ admitem TNP -complementos e as condições que se seguem são válidas:

i. $a_{12}a_{21} \neq 0$ e $a_{22} = 0 \Rightarrow a_{45} = a_{54} = a_{55} = 0$;

ii. $a_{45}a_{54} \neq 0$ e $a_{44} = 0 \Rightarrow a_{12} = a_{21} = a_{11} = 0$.

Como podemos intuir dos resultados anteriores, as condições exigidas para a completabilidade de TNP -matrizes cujos grafos associados são caminhos monotonaamente etiquetados de ordem n vão, em geral, para além de exigir a completabilidade de todas as submatrizes principais cujos grafos associados são caminhos monotonaamente etiquetados de ordem $n - 1$. O seguinte exemplo ilustra este facto.

Exemplo 3.8. Consideremos a TNP -matriz parcial A , de ordem n , com $n \geq 5$,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? & ? & \dots & ? & ? & ? \\ -1 & 0 & 0 & ? & \dots & ? & ? & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 & \dots & ? & ? & ? \\ ? & ? & 0 & 0 & \dots & ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & ? & \dots & 0 & 0 & ? \\ ? & ? & ? & ? & \dots & 0 & 0 & -1 \\ ? & ? & ? & ? & \dots & ? & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O grafo associado a esta matriz parcial é um caminho monotonamente etiquetado de ordem n e os completamentos nulos das submatrizes $A[\{1, \dots, n-1\}]$ e $A[\{2, \dots, n\}]$ são TNP -matrizes. No entanto, A não admite TNP -completamentos. Dado um qualquer completamento $A_c = (-c_{ij})_{i,j=1}^n$ de A , temos que $\det A_c[\{1, 2\}|\{1, n\}] = c_{2n}$. Logo, para que esse menor seja não positivo, é necessário que c_{2n} seja nulo. Mas, nesse caso, $\det A_c[\{2, n\}|\{1, n\}] = 1$. Logo, A_c não é uma TNP -matriz e, por conseguinte, não existem TNP -completamentos de A .

O lema que se segue, e cuja prova omitimos, leva-nos a formular uma conjectura que posteriormente apresentamos.

Lema 3.9. *Consideremos uma TNP -matriz parcial A da forma*

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ? & ? & ? & ? \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & ? & ? & ? \\ ? & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} & ? & ? \\ ? & ? & -a_{43} & -a_{44} & -a_{45} & ? \\ ? & ? & ? & -a_{54} & -a_{55} & -a_{56} \\ ? & ? & ? & ? & -a_{65} & -a_{66} \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é não negativo. A matriz parcial A admite TNP -completamentos se e só se as submatrizes principais $A[\{1, 2, 3, 4, 5\}]$ e $A[\{2, 3, 4, 5, 6\}]$ admitem TNP -matrizes como completamentos e as condições que se seguem são válidas:

i. $a_{12}a_{21} \neq 0$ e $a_{22} = 0 \Rightarrow a_{56} = a_{65} = a_{66} = 0$;

ii. $a_{56}a_{65} \neq 0$ e $a_{55} = 0 \Rightarrow a_{12} = a_{21} = a_{11} = 0$.

Conjectura 3.1. *Seja A uma TNP -matriz parcial da forma*

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ? & \dots & ? & ? \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{32} & -a_{33} & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -a_{n-1n-1} & -a_{n-1n} \\ ? & ? & ? & \dots & -a_{nn-1} & -a_{nn} \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é não negativo e $n \geq 5$. Então, A admite TNP -completamentos se e somente se $A[\{1, \dots, n-1\}]$ e $A[\{2, \dots, n\}]$ admitem TNP -completamentos e as condições que se seguem são válidas:

i. $a_{12}a_{21} \neq 0$ e $a_{22} = 0 \Rightarrow a_{n-1n} = a_{nn-1} = a_{nn} = 0$;

ii. $a_{n-1n}a_{nn-1} \neq 0$ e $a_{n-1n-1} = 0 \Rightarrow a_{12} = a_{21} = a_{11} = 0$.

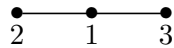
Facilmente se verifica que as condições enunciadas são condições necessárias para a existência de um TNP -completamento de uma TNP -matriz parcial A da forma referida. Com base no Teorema 3.1, é também simples de comprovar que a conjectura é válida quando pelo menos um dos elementos da diagonal principal $a_{22}, \dots, a_{n-1n-1}$ é não nulo. Se $a_{22} = \dots = a_{n-1n-1} = 0$ e $a_{11} = a_{12} = a_{21}$, podemos efectivamente obter um TNP -completamento de A , exigindo as condições enunciadas e completando a submatriz principal $A[\{2, \dots, n\}]$ de forma a obter uma TNP -matriz e as entradas $(1, i)$ e $(i, 1)$ não prescritas com zeros. Seguindo um raciocínio análogo, é possível completar a matriz A de modo a obter o completamento desejado, sob as condições enunciadas na conjectura, quando $a_{22} = \dots = a_{n-1n-1} = 0$ e $a_{nn} = a_{n-1n} = a_{nn-1}$. Para os restantes casos, o estudo complica-se, uma vez que é necessário analisar as várias possibilidades de entradas prescritas nulas e não nulas, o que é, obviamente, uma tarefa morosa para cada n em particular, e aparentemente não se traduz num padrão comum a qualquer n .

Dificuldades análogas surgem, também, no estudo do problema quando o grafo associado à matriz parcial é um caminho não monotonamente etiquetado.

Exemplo 3.9. O grafo das entradas prescritas da TNP -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -6 & -1 & ? \\ -1 & ? & -1 \end{bmatrix}$$

é o caminho não monotonamente etiquetado



Consideremos $x \in \mathbb{R}^+$ e A_c um completamento de A cuja entrada $(2, 3)$ é $-x$. Atendendo a que $\det A_c[\{1, 2\}|\{2, 3\}] = x - 2$ e $\det A_c[\{2, 3\}|\{1, 3\}] = 6 - x$, podemos afirmar que não existem TNP -completamentos de A .

Como podemos comprovar pelo exemplo anterior, uma TNP -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é um caminho não monotonamente etiquetado, não admite, em geral, TNP -completamentos. Para o caso em que $n = 3$, apresentamos, de seguida, condições necessárias e suficientes para a existência dos completamentos desejados.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Diz-se que uma matriz parcial $A = (-a_{ij})_{i,j=1}^n$, cujo grafo associado é G , *satisfaz as condições das arestas adjacentes* se, dado um caminho



não monotonamente etiquetado em G , se tem

1. $i < k < j$ ou $j < k < i$ e
 - 1.1. $a_{ii}a_{jk} \neq 0 \Rightarrow a_{ji} \neq 0$;
 - 1.2. $a_{ii}a_{kj} \neq 0 \Rightarrow a_{ij} \neq 0$;
 - 1.3. $a_{jj} = a_{jk} = a_{kj} = 0 \Rightarrow a_{ij}a_{kk}a_{ji} = 0$;
 - 1.4. $a_{kk}a_{ij}a_{ji} \geq a_{ii}a_{jk}a_{kj}$.

ou

2. $j < i < k$ ou $k < i < j$ e
 - 2.1. $a_{kk}a_{ji} \neq 0 \Rightarrow a_{jk} \neq 0$;
 - 2.2. $a_{kk}a_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{kj} \neq 0$;
 - 2.3. $a_{jj} = a_{ji} = a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{kj}a_{ii}a_{jk} = 0$;
 - 2.4. $a_{ii}a_{kj}a_{jk} \geq a_{kk}a_{ji}a_{ij}$.

Vejamos, de seguida, o que podemos concluir relativamente ao caso em que a ordem das matrizes parciais é 3.

Lema 3.10. *Seja A uma TNP -matriz parcial 3×3 cujo grafo das entradas especificadas é um caminho não monotonamente etiquetado. Então, A admite TNP -completamentos se e somente se A satisfaz as condições das arestas adjacentes.*

Demonstração. Por semelhança de permutação admissível, podemos assumir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & ? & -a_{13} \\ ? & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix},$$

com cada a_{ij} não negativo.

Admitamos que

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -b & -a_{13} \\ -c & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

é um TNP -completamento de A , sendo $b, c \geq 0$.

Suponhamos que $a_{11}a_{23} \neq 0$ e $a_{13} = 0$. Nesse caso, o determinante da submatriz $A_c[\{1, 2\}|\{1, 3\}]$ é positivo, o que contradiz o facto de A_c ser uma TNP -matriz. Portanto, se $a_{11}a_{23} \neq 0$, então $a_{13} \neq 0$. Admitamos, agora,

que $a_{11}a_{32} \neq 0$ e $a_{31} = 0$. Podemos, então, afirmar que $\det A_c [\{1, 3\}|\{1, 2\}] = a_{11}a_{32} > 0$, o que é impossível. Assim, se $a_{11}a_{32} \neq 0$, temos que $a_{31} \neq 0$. Suponhamos, de seguida, que $a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0$ e $a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$. Facilmente se verifica que, nesse caso, $\det A_c = a_{13}a_{22}a_{31} > 0$, o que é absurdo. Podemos, pois, concluir que se $a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0$, então $a_{13}a_{22}a_{31} = 0$.

Vejamos, agora, que $a_{22}a_{13}a_{31} \geq a_{11}a_{23}a_{32}$. Para tal, notemos que

$$\det A_c [\{1, 2\}|\{2, 3\}] \leq 0 \Leftrightarrow a_{23}b \leq a_{13}a_{22}$$

e

$$\det A_c [\{1, 3\}|\{1, 2\}] \leq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{32} \leq a_{31}b.$$

Assim, $ba_{11}a_{23}a_{32} \leq ba_{22}a_{13}a_{31}$. Caso $b \neq 0$, é óbvio que a desigualdade é válida. Se $b = 0$, então $a_{11}a_{32} = 0$ e, por conseguinte, $a_{11}a_{23}a_{32} = 0$. É, pois, óbvio que $a_{22}a_{13}a_{31} \geq a_{11}a_{23}a_{32}$.

Mostremos, agora, que as condições das arestas adjacentes, para além de necessárias, são também suficientes para que uma TNP -matriz parcial da forma enunciada admita TNP -completamentos.

Dados $x, y \in \mathbb{R}_0^+$, consideremos o completamento

$$A_{x,y} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -x & -a_{13} \\ -y & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

de A .

Se $a_{23} \neq 0$ e $a_{32} \neq 0$, é fácil de verificar que $A_{x,y}$ é uma TNP -matriz para $x = a_{13}a_{22}a_{23}^{-1}$ e $y = a_{31}a_{22}a_{32}^{-1}$.

Estudemos, então, os casos em que pelo menos uma das entradas a_{23} ou a_{32} é nula.

Comecemos por considerar o caso em que $a_{23} = 0$. Se $a_{33} \neq 0$, então $A_{x,y}$ é uma TNP -matriz para $x = a_{13}a_{32}a_{33}^{-1}$ e $y = 0$. Admitamos, agora, que $a_{33} = 0$. Consideramos os seguintes três casos: $a_{31} = 0$; $a_{31} \neq 0$ e $a_{32} \neq 0$; $a_{31} \neq 0$ e $a_{32} = 0$. Se $a_{31} = 0$, atendendo às condições das arestas adjacentes, sabemos que $a_{11}a_{32} = 0$. Assim, $A_{a_{22},a_{11}}$ é uma TNP -matriz. Se $a_{31} \neq 0$ e $a_{32} \neq 0$, facilmente se verifica que $A_{x,y}$ é um TNP -completamento de A para $x = a_{32}a_{11}a_{31}^{-1}$ e $y = a_{31}a_{22}a_{32}^{-1}$. Finalmente, no caso em que $a_{31} \neq 0$ e $a_{32} = 0$, temos que $a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0$. Pelas condições das arestas adjacentes sabemos, então, que $a_{13}a_{22} = 0$. Assim, $A_{a_{22},a_{11}}$ é uma TNP -matriz.

Consideremos, por fim, o caso em que $a_{32} = 0$. Se $a_{33} \neq 0$, então $A_{x,y}$ é um TNP -completamento de A para $x = 0$ e $y = a_{23}a_{31}a_{33}^{-1}$. Admitamos, de seguida, que $a_{33} = 0$. São três os casos possíveis: $a_{13} = 0$; $a_{13} \neq 0$ e $a_{23} \neq 0$; $a_{13} \neq 0$ e $a_{23} = 0$. Se $a_{13} = 0$, sabemos, então, pelas condições das arestas adjacentes,

que $a_{11}a_{23} = 0$. Assim, $A_{a_{11},a_{22}}$ é uma TNP -matriz. Se $a_{13} \neq 0$ e $a_{23} \neq 0$, $A_{x,y}$ é um TNP -completamento de A para $x = a_{13}a_{22}a_{23}^{-1}$ e $y = a_{23}a_{11}a_{13}^{-1}$. No caso em que $a_{13} \neq 0$ e $a_{23} = 0$, temos que $a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0$. Atendendo uma vez mais às condições das arestas adjacentes, podemos afirmar que $a_{22}a_{31} = 0$ e que $A_{a_{11},a_{22}}$ é uma TNP -matriz. \square

Note-se que se A é uma TNP -matriz parcial, $n \times n$, cujo grafo das entradas especificadas G_A é um caminho não monotonicamente etiquetado e A admite TNP -completamentos, então toda a submatriz principal correspondente a um caminho não monotonicamente etiquetado $\{i, j\}, \{j, k\}$ contido em G_A admite TNP -completamentos. Atendendo ao resultado anterior, sabemos que todas essas submatrizes satisfazem as condições das arestas adjacentes. Portanto, também A satisfaz as condições das arestas adjacentes. No entanto, estas condições não são suficientes para garantir, em geral, a existência de TNP -completamentos de uma TNP -matriz parcial, $n \times n$, com $n \geq 4$, cujo grafo associado é um caminho não monotonicamente etiquetado, como ilustra o exemplo que se segue.

Exemplo 3.10. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & ? & ? \\ 0 & ? & 0 & -1 \\ ? & ? & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

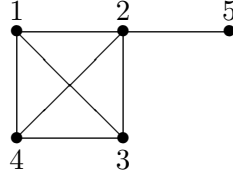
Facilmente se verifica que A é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é um caminho não monotonicamente etiquetado de ordem 4 e que A satisfaz as condições das arestas adjacentes. No entanto, A não admite TNP -completamentos. De facto, dado um qualquer completamento A_c de A , $\det A_c[\{1, 4\}|\{1, 3\}] = 1$.

Consideremos, agora, o problema de completamento em questão para TNP -matrizes parciais cujo grafo associado é um grafo clique⁺¹. Um grafo $G = (V, E)$ diz-se um *grafo clique⁺¹* se o subgrafo $\langle \{1, \dots, n-1\} \rangle$ é um grafo completo e se existe um e um só $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\{j, n\} \in E$. O índice j diz-se o *índice de sobreposição*.

Exemplo 3.11. O grafo associado à TNP -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & ? \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & ? \\ -1 & -1 & -1 & -1 & ? \\ ? & -1 & ? & ? & -1 \end{bmatrix}$$

é o grafo clique⁺¹



Note-se que um grafo clique⁺¹ é um grafo 1-cordal com dois cliques maximais, tendo um dos cliques dois vértices. Além disso, é monotonamente etiquetado se $j = n - 1$ e não monotonamente etiquetado nos restantes casos.

Lema 3.11. *Seja $A = (-a_{il})_{i,l=1}^n$ uma TNP -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é um grafo clique⁺¹ com índice de sobreposição $j \neq n - 1$, e tal que cada a_{il} é não negativo e $a_{jn-1}a_{n-1j} \neq 0$. Então, existe um TNP -completamento de A se e somente se A satisfaz as condições das arestas adjacentes.*

Demonstração. Admitamos que existe um TNP -completamento A_c de A .

Consideremos o grafo G_A associado a A . Dado um qualquer caminho não monotonamente etiquetado $\{i, k\}, \{k, l\}$ de ordem 3 em G_A tal que $\{i, l\}$ não é uma aresta do grafo, a submatriz $A[\{i, k, l\}]$ de A é uma TNP -matriz parcial 3×3 , cujo grafo das entradas prescritas é um caminho não monotonamente etiquetado, e $A_c[\{i, k, l\}]$ é um seu TNP -completamento. Atendendo ao Lema 3.10, sabemos que a submatriz $A[\{i, k, l\}]$ satisfaz as condições das arestas adjacentes. Naturalmente, podemos concluir, então, que A satisfaz as condições das arestas adjacentes.

Reciprocamente, admitamos que A satisfaz as condições das arestas adjacentes. Sabemos, em particular, que A é tal que $a_{jn}a_{nj}a_{n-1n-1} \geq a_{jn-1}a_{n-1j}a_{nn}$.

Se $a_{n-1n-1} \neq 0$, consideremos a matriz parcial

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} -a_{11} & \dots & -a_{1j} & \dots & -a_{1n-1} & ? \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{j1} & \dots & -a_{jj} & \dots & -a_{jn-1} & ? \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-11} & \dots & -a_{n-1j} & \dots & -a_{n-1n-1} & -a_{jn-1}^{-1}a_{n-1n-1}a_{jn} \\ \hline ? & \dots & ? & \dots & -a_{n-1j}^{-1}a_{n-1n-1}a_{nj} & -a_{nn} \end{array} \right].$$

Dado que $a_{jn}a_{nj}a_{n-1n-1} \geq a_{jn-1}a_{n-1j}a_{nn}$, \bar{A} é uma TNP -matriz parcial. Note-se que o seu grafo das entradas especificadas é 1-cordal com dois cliques maximais, tendo um desses cliques dois vértices. Pela Proposição 3.3, existe um TNP -completamento de \bar{A} cujos elementos nas entradas (j, n) e (n, j) são, respectivamente, $-a_{jn}$ e $-a_{nj}$. Logo, tal completamento de \bar{A} é, também, um TNP -completamento de A .

Admitamos, agora, que $a_{n-1n-1} = 0$. Neste caso, $a_{jn-1}a_{n-1j}a_{nn} \leq 0$, pelo que $a_{nn} = 0$. Sejam $\alpha = a_{jn-1}^{-1}a_{jn}$ e $\beta = a_{n-1j}^{-1}a_{nj}$. Facilmente se verifica que

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1j} & \dots & -a_{1n-2} & -a_{1n-1} & -\alpha a_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{j1} & \dots & -a_{jj} & \dots & -a_{jn-2} & -a_{jn-1} & -\alpha a_{jn-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-21} & \dots & -a_{n-1j} & \dots & -a_{n-2n-2} & -a_{n-2n-1} & -\alpha a_{n-2n-1} \\ -a_{n-11} & \dots & -a_{n-1j} & \dots & -a_{n-1n-2} & 0 & 0 \\ -\beta a_{n-11} & \dots & -\beta a_{n-1j} & \dots & -\beta a_{n-1n-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é um *TNP*-complementamento de A . □

Observação. Note-se que, nas condições enunciadas no lema anterior, dizer que a matriz A satisfaz as condições das arestas adjacentes é equivalente a dizer que $a_{jn}a_{nj}a_{n-1n-1} \geq a_{jn-1}a_{n-1j}a_{nn}$.

Podemos generalizar o resultado anterior, pensando numa extensão da noção de grafo clique⁺. Um grafo $G = (V, E)$ diz-se um *grafo clique⁺(n-k)*, para algum $k \leq n-1$, se o subgrafo $\langle \{1, \dots, k\} \rangle$ é um clique e se existe um único $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que as restantes arestas de E são $\{j, l\}$, com $l \in \{k+1, \dots, n\}$. O índice j diz-se o *índice de sobreposição*.

Lema 3.12. *Seja $A = (-a_{il})_{i,l=1}^n$ uma *TNP*-matriz parcial $n \times n$, cujo grafo das entradas especificadas é um grafo clique⁺(n-k) com $k \leq n-1$ e índice de sobreposição $j < k$, e tal que cada a_{il} é não negativo e $a_{jl}a_{lj} \neq 0$ para todo $k \leq l \leq n-1$. Então, existe um *TNP*-complementamento de A se e somente se A satisfaz as condições das arestas adjacentes.*

Demonstração. A matriz A é da forma

$$A = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1j} & \dots & -a_{1k} & ? & \dots & ? \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2j} & \dots & -a_{2k} & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{j1} & -a_{j2} & \dots & -a_{jj} & \dots & -a_{jk} & -a_{jk+1} & \dots & -a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \dots & -a_{kj} & \dots & -a_{kk} & ? & \dots & ? \\ \hline ? & ? & \dots & -a_{k+1j} & \dots & ? & -a_{k+1k+1} & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & -a_{nj} & \dots & ? & ? & \dots & -a_{nn} \end{array} \right],$$

com cada $a_{il} > 0$.

Comecemos por admitir que existe um TNP -completamento de A . Atendendo ao Lema 3.10, podemos, obviamente, concluir que A satisfaz as condições das arestas adjacentes.

A demonstração do recíproco segue por indução no número $p = n - k$ de vértices $l > k$ tais que $\{j, l\}$ é uma aresta do grafo associado à matriz parcial.

O caso em que $p = 1$ é tratado no resultado anterior.

Consideremos, agora, $p > 1$ e admitamos que o resultado é válido para $p - 1$.

Assumamos que A satisfaz as condições das arestas adjacentes.

Sabemos que a submatriz principal $A[\{1, \dots, k+1\}]$ de A é uma TNP -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é um grafo clique⁺¹ com índice de sobreposição j . Além disso, $a_{jk}a_{kj} \neq 0$ e esta submatriz principal satisfaz as condições das arestas adjacentes. Assim, pelo resultado anterior, existe um TNP -completamento C dessa submatriz de A .

Consideremos a TNP -matriz parcial \bar{A} obtida de A completando a submatriz principal referida como em C . \bar{A} é, obviamente, uma TNP -matriz parcial $n \times n$, cujo grafo das entradas especificadas é um grafo clique^{+(n-(k+1))} e índice de sobreposição j . O número de vértices $l > k + 1$ tais que $\{j, l\}$ é uma aresta do grafo associado é $p - 1$.

Claramente, \bar{A} satisfaz as condições das arestas adjacentes. Atendendo à hipótese de indução, podemos concluir que existe um TNP -completamento de \bar{A} . Por conseguinte, A admite TNP -completamentos. \square

Observação. É fácil de verificar que, nas condições enunciadas neste último lema, dizer que a TNP -matriz parcial A satisfaz as condições das arestas adjacentes é o mesmo que dizer que $a_{jl+1}a_{l+1j}a_{ll} \geq a_{jl}a_{lj}a_{l+1l+1}$, para todo o $l \in \{k, \dots, n-1\}$.

3.1.2 Ciclos não dirigidos

Estudemos, de seguida, o problema de completamento respeitante aos ciclos. Um ciclo $G = (V, E)$, com $V = \{1, \dots, n\}$, diz-se *monotonamente etiquetado* se $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{1, n\}\}$.

Exemplo 3.12. Consideremos a TNP -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & ? & -0,5 \\ -2 & -1 & -1 & ? \\ ? & -2 & -1 & -1 \\ -8 & ? & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo monotonamente etiquetado. Sejam $x \in \mathbb{R}_0^+$ e A_c um completamento de A em que o elemento na entrada $(1, 3)$

é $-x$. Temos que $\det A_c [\{1, 2\}|\{2, 3\}] \leq 0$ se e só se $x \geq 1$. Além disso, $\det A_c [\{1, 3\}|\{3, 4\}] \leq 0$ se e somente se $x \leq 0, 5$. Independentemente do valor de x , A_c não é, obviamente, uma TNP -matriz. Logo, A não admite TNP -completamentos. Podemos, portanto, afirmar que, em geral, um ciclo monotonamente etiquetado não admite TNP -completamentos.

Nos resultados que se seguem consideramos apenas TNP -matrizes parciais cujos elementos da diagonal principal são todos não nulos. Como já referimos anteriormente, podemos assumir, sem perda de generalidade, que tais elementos são iguais a -1 . Apresentamos, então, condições necessárias e suficientes para garantir a existência de TNP -completamentos de tais TNP -matrizes parciais cujos grafos das entradas especificadas são ciclos monotonamente etiquetados.

Note-se que, se todos os elementos da diagonal principal de uma TNP -matriz são não nulos, então todos os seus elementos são negativos.

Lema 3.13. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & -a_{14} \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} & ? \\ ? & -a_{32} & -1 & -a_{34} \\ -a_{41} & ? & -a_{43} & -1 \end{bmatrix}$$

uma TNP -matriz parcial onde todo o a_{ij} é positivo. Então, A admite TNP -completamentos se e somente se são válidas as seguintes desigualdades

$$1. \ a_{12}a_{23}a_{34} \leq a_{14};$$

$$2. \ a_{21}a_{32}a_{43} \leq a_{41}.$$

Demonstração. Admitamos, primeiro, que existe um TNP -completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -c_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} & -c_{24} \\ -c_{31} & -a_{32} & -1 & -a_{34} \\ -a_{41} & -c_{42} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix}$$

de A , onde todo o c_{ij} é positivo. Temos que

$$\det A_c [\{1, 2\}|\{2, 3\}] = a_{12}a_{23} - c_{13}$$

e

$$\det A_c [\{1, 3\}|\{3, 4\}] = c_{13}a_{34} - a_{14}.$$

Logo, $a_{14} \geq c_{13}a_{34} \geq a_{12}a_{23}a_{34}$. Temos, ainda, que

$$\det A_c [\{3, 4\}|\{2, 3\}] = a_{32}a_{43} - c_{42}$$

e

$$\det A_c [\{2, 4\} | \{1, 2\}] = a_{21}c_{42} - a_{41}.$$

Assim, $a_{41} \geq a_{21}c_{42} \geq a_{21}a_{32}a_{43}$.

Reciprocamente, admitamos que as condições 1 e 2 são satisfeitas. Consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{12}a_{23} & -a_{14} \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} & -a_{14}a_{12}^{-1} \\ -a_{41}a_{43}^{-1} & -a_{32} & -1 & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{32}a_{43} & -a_{43} & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Prova-se que, sendo válidas as desigualdades 1 e 2, A_c tem todos os menores não positivos. \square

O resultado anterior pode ser generalizado para matrizes de ordem arbitrária.

Proposição 3.4. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{32} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & ? & ? & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}$$

uma TNP -matriz parcial onde todo o a_{ij} é positivo. Então, A admite TNP -completamentos se e somente se são válidas as desigualdades

$$1. \ a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} \leq a_{1n};$$

$$2. \ a_{21}a_{32} \dots a_{nn-1} \leq a_{n1}.$$

Demonstração. A demonstração segue por indução em n . O caso em que $n = 4$ é tratado no Lema 3.13. Consideremos $n > 4$ e admitamos que o resultado é válido para $n - 1$.

Suponhamos que existe um TNP -completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -c_{13} & \dots & -c_{1n-1} & -a_{1n} \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} & \dots & -c_{2n-1} & -c_{2n} \\ -c_{31} & -a_{32} & -1 & \dots & -c_{3n-1} & -c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -c_{n-11} & -c_{n-12} & -c_{n-13} & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & -c_{n2} & -c_{n3} & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}$$

de A , com $c_{ij} > 0$, para quaisquer i, j . Então, $A_c[\{2, \dots, n\}]$ é um TNP -completamento da TNP -matriz parcial

$$\begin{bmatrix} -1 & -a_{23} & \dots & ? & -c_{2n} \\ -a_{32} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -c_{n2} & ? & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo à hipótese de indução, sabemos que

$$a_{23}a_{34} \dots a_{n-1n} \leq c_{2n}$$

e

$$a_{32}a_{43} \dots a_{nn-1} \leq c_{n2}.$$

Dado que

$$\det A_c[\{1, 2\}|\{2, n\}] = a_{12}c_{2n} - a_{1n} \leq 0$$

e

$$\det A_c[\{2, n\}|\{1, 2\}] = a_{21}c_{n2} - a_{n1} \leq 0,$$

podemos concluir que as desigualdades 1 e 2 são válidas.

Reciprocamente, admitamos que tais condições são satisfeitas. Consideremos a matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & ? \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & -a_{1n}a_{12}^{-1} \\ ? & -a_{32} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ ? & -a_{n1}a_{21}^{-1} & ? & \dots & -a_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Vejamos que \bar{A} é uma TNP -matriz parcial. A submatriz $\bar{A}[\{2, n\}]$ tem determinante igual a $1 - a_{1n}a_{n1}a_{12}^{-1}a_{21}^{-1}$. Como

$$a_{1n}a_{n1} \geq a_{12}a_{21}a_{23}a_{32} \dots a_{n-1n}a_{nn-1},$$

segue-se que $a_{1n}a_{n1} \geq a_{12}a_{21}$ e, por conseguinte, $\det \bar{A}[\{2, n\}] \leq 0$. Se $n > 5$, este argumento é suficiente para concluirmos que \bar{A} é uma TNP -matriz parcial. No caso em que $n = 5$, é, também, necessário mostrar que as submatrizes $\bar{A}[\{2, 4\}|\{3, 5\}]$ e $\bar{A}[\{3, 5\}|\{2, 4\}]$ têm determinante não positivo. Ora, nesse caso, temos que

$$\det \bar{A}[\{2, 4\}|\{3, 5\}] = a_{23}a_{45} - a_{15}a_{12}^{-1}a_{43}$$

e

$$\det \bar{A}[\{3, 5\}|\{2, 4\}] = a_{32}a_{54} - a_{51}a_{21}^{-1}a_{34}.$$

Estes determinantes são não positivos se e somente se

$$a_{12}a_{23}a_{45} \leq a_{15}a_{43}$$

e

$$a_{21}a_{32}a_{54} \leq a_{51}a_{34}.$$

Atendendo às desigualdades 1 e 2, podemos afirmar que

$$a_{15}a_{43} \geq a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{43}$$

e

$$a_{51}a_{34} \geq a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}a_{34}.$$

Como $a_{34}a_{43} \geq 1$, os dois determinantes em questão são não positivos. Assim, para qualquer n , \bar{A} é uma *TNP*-matriz parcial.

Podemos escrever as desigualdades 1 e 2 na forma

$$a_{23}a_{34} \dots a_{n-1n} \leq a_{1n}a_{12}^{-1}$$

e

$$a_{32}a_{43} \dots a_{nn-1} \leq a_{n1}a_{21}^{-1}.$$

Deste modo, temos que $\bar{A}[\{2, \dots, n\}] = (-b_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ é uma *TNP*-matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo monotonamente etiquetado com $n - 1$ vértices e que as desigualdades

$$b_{12}b_{23} \dots b_{n-2n-1} \leq b_{1n-1}$$

e

$$b_{21}b_{32} \dots b_{n-1n-2} \leq b_{n-11}$$

são válidas. Pela hipótese de indução, existe, então, um *TNP*-complemento C desta matriz parcial da forma

$$\begin{bmatrix} -1 & c_{12} \\ c_{21}^T & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Consideremos a *TNP*-matriz parcial

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? \\ -a_{21} & -1 & c_{12} \\ ? & c_{21}^T & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Note-se que o grafo das entradas prescritas de $\bar{\bar{A}}$ é 1-cordal monotonicamente etiquetado com dois cliques maximais, tendo um desses cliques dois vértices. Pela Proposição 3.3, existe um TNP -completamento A_c de $\bar{\bar{A}}$ cujos elementos nas entradas $(1, n)$ e $(n, 1)$ são, respectivamente, $-a_{1n}$ e $-a_{n1}$. Logo, A_c é, também, um TNP -completamento de A . \square

Pensando no problema mais geral, quando existe pelo menos um elemento da diagonal principal nulo, deparamo-nos com o problema em aberto relativo à completabilidade de caminhos. Com efeito, para que uma TNP -matriz parcial da forma

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ? & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & ? \\ ? & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & ? & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix}$$

admita TNP -completamento é necessário que cada uma das submatrizes parciais cujos grafos associados são os caminhos $\Gamma_1 : \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$, $\Gamma_2 : \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}$, $\Gamma_3 : \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 2\}$ e $\Gamma_4 : \{4, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}$ admita TNP -completamentos. Além disso, é fácil de comprovar que é também necessário que as desigualdades $a_{14}a_{22}a_{33} \geq a_{12}a_{23}a_{34}$ e $a_{41}a_{22}a_{33} \geq a_{21}a_{32}a_{43}$ sejam válidas. No entanto, estas condições não são, em geral, suficientes, como podemos verificar no exemplo que se segue.

Exemplo 3.13. Consideremos a TNP -matriz parcial

$$A = (-a_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} -1 & -3 & ? & -1 \\ -4 & -2 & -2 & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 \\ -1 & ? & -0,1 & -0,1 \end{bmatrix},$$

cujo grafo das entradas prescritas é um ciclo monotonicamente etiquetado de comprimento 4. Facilmente se verifica que cada uma das submatrizes parciais cujos grafos associados são os caminhos $\Gamma_1 : \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$, $\Gamma_2 : \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}$, $\Gamma_3 : \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 2\}$ e $\Gamma_4 : \{4, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}$ admite TNP -completamentos. Temos, ainda, que $a_{14}a_{22}a_{33} \geq a_{12}a_{23}a_{34}$ e $a_{41}a_{22}a_{33} \geq a_{21}a_{32}a_{43}$. No entanto, A não admite TNP -completamentos. Dado $x \in \mathbb{R}_0^+$, consideremos um completamento A_c de A cujo elemento na posição $(2, 4)$ é $-x$. O determinante da submatriz $A_c[\{1, 2\}|\{2, 4\}]$ é não positivo se e somente se $x \leq 2/3$, enquanto que o menor $\det A_c[\{2, 4\}|\{3, 4\}]$ é não positivo se e só se $x \geq 2$. Assim, estes dois determinantes não são simultaneamente não positivos, pelo que A não admite TNP -matrizes como completamentos.

3.1.3 O caso não combinatorialmente simétrico

Abordamos, de seguida, o problema de completamento de caminhos totalmente especificados. Consideramos, portanto, grafos dirigidos e matrizes parciais não combinatorialmente simétricas.

Relembremos que um *caminho totalmente especificado* Γ num digrafo $D = (V, E)$ é um caminho não fechado $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ em D tal que $(i_1, i_k) \in E$. Dizemos que Γ é *monotonamente etiquetado* se $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ou $i_1 > i_2 > \dots > i_k$.

Como o exemplo que se segue ilustra, nem sempre é possível garantir a existência de um TNP -completamento de uma TNP -matriz parcial cujo digrafo associado é um caminho totalmente especificado.

Exemplo 3.14. A TNP -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ ? & -1 & -1 \\ ? & ? & -1 \end{bmatrix},$$

cujo digrafo associado é um caminho totalmente especificado monotonamente etiquetado, não admite TNP -completamentos, uma vez que $\det A_c[\{1, 2\}] = 1$ para qualquer completamento A_c de A . Também a TNP -matriz parcial

$$B = \begin{bmatrix} -1 & ? & ? \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & ? & -1 \end{bmatrix},$$

cujo digrafo das entradas especificadas é um caminho totalmente especificado não monotonamente etiquetado, não admite TNP -matrizes como completamentos. De facto, dado um qualquer completamento B_c de B , $\det B_c[\{1, 2\}] = 1$.

A existência de elementos nulos condiciona fortemente a existência do completamento desejado. Nos resultados que seguem, consideramos apenas TNP -matrizes parciais cujos elementos prescritos são não nulos.

Lema 3.14. *Seja $A = (-a_{ij})_{i,j=1}^3$ uma TNP -matriz parcial cujo digrafo das entradas especificadas $D_A = (V, E)$ é um caminho totalmente especificado e cujos elementos especificados são não nulos. Então, A admite TNP -completamentos.*

Demonstração. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que os elementos diagonais de A são todos iguais a -1 . Tendo em conta que a classe das TNP -ma-

trizes 3×3 é invariante para a semelhança de permutação definida pela matriz

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

são apenas três os casos a considerar:

(a) $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

Neste caso, A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{13} \\ ? & -1 & -a_{23} \\ ? & ? & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{12}, a_{13}, a_{23} > 0$. Facilmente se verifica que

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12}^{-1} & -1 & -a_{23} \\ -a_{12}^{-1}a_{23}^{-1} & -a_{23}^{-1} & -1 \end{bmatrix}$$

é um TNP -complemento de A .

(b) $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 2\}\}$

A matriz parcial A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{13} \\ ? & -1 & ? \\ ? & -a_{32} & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{12}, a_{13}, a_{32} > 0$. Verifica-se que

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12}^{-1} & -1 & -a_{12}^{-1}a_{13} \\ -a_{12}^{-1}a_{32}^{-1} & -a_{32}^{-1} & -1 \end{bmatrix}$$

é um TNP -complemento de A .

(c) $E = \{\{2, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$

Neste caso, A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -1 & ? & ? \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} \\ -a_{31} & ? & -1 \end{bmatrix},$$

com $a_{21}, a_{23}, a_{31} > 0$. Prova-se que

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{21}^{-1} & -a_{21}^{-1}a_{23} \\ -a_{21} & -1 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{21}^{-1}a_{31} & -1 \end{bmatrix}$$

é um TNP -completamento de A . □

O resultado anterior não é generalizável para uma ordem arbitrária.

Exemplo 3.15. Seja A a TNP -matriz parcial $n \times n$, $n > 3$,

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & ? & \dots & ? & -2 \\ ? & -1 & -2 & \dots & ? & ? \\ ? & ? & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -2 \\ ? & ? & ? & \dots & ? & -1 \end{bmatrix},$$

cujo digrafo das entradas especificadas é um caminho totalmente especificado, monotonamente etiquetado. Suponhamos que existe um TNP -completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -c_{13} & \dots & -c_{1n-1} & -2 \\ -c_{21} & -1 & -2 & \dots & -c_{2n-1} & -c_{2n} \\ -c_{31} & -c_{32} & -1 & \dots & -c_{3n-1} & -c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -c_{n-11} & -c_{n-12} & -c_{n-13} & \dots & -1 & -2 \\ -c_{n1} & -c_{n2} & -c_{n3} & \dots & -c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

de A , onde todo o c_{ij} é positivo. Note-se que, então, A_c é um TNP -completamento da TNP -matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & ? & \dots & ? & -2 \\ -c_{21} & -1 & -2 & \dots & ? & ? \\ ? & -c_{32} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -2 \\ -c_{n1} & ? & ? & \dots & -c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo monotonamente etiquetado. Mas, pela Proposição 3.4, \bar{A} não admite TNP -completamentos, uma vez que $2^{n-1} \not\leq 2$. A contradição resultou de supormos que existia um TNP -completamento de A . Logo, A não admite tais completamentos.

Apresentamos, de seguida, condições necessárias e suficientes para a existência de TNP -completamentos das TNP -matrizes parciais cujos digrafos das entradas prescritas são caminhos totalmente especificados monotonamente etiquetados e cujos elementos prescritos são não nulos. Note-se que o estudo desse tipos de TNP -matrizes parciais pode ser restringido, sem perda de generalidade, ao caso em que as entradas diagonais são todas iguais a -1 e os arcos do digrafo associado são, exactamente, $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (1, n)$, sendo cada um dos elementos especificados não nulo.

Proposição 3.5. *Sejam $n > 3$ e*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ ? & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & ? & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ ? & ? & ? & \dots & ? & -1 \end{bmatrix}$$

uma TNP -matriz parcial onde todo o a_{ij} é positivo. Então, A admite TNP -completamentos se e só se $a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} \leq a_{1n}$.

Demonstração. Suponhamos que existe um TNP -completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -c_{13} & \dots & -c_{1n-1} & -a_{1n} \\ -c_{21} & -1 & -a_{23} & \dots & -c_{2n-1} & -c_{2n} \\ -c_{31} & -c_{32} & -1 & \dots & -c_{3n-1} & -c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -c_{n-11} & -c_{n-12} & -c_{n-13} & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -c_{n1} & -c_{n2} & -c_{n3} & \dots & -c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}$$

de A , com $c_{ij} > 0$, para todo o i e todo o j . Obviamente, A_c é um TNP -completamento da TNP -matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ -c_{21} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -c_{32} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -c_{n1} & ? & ? & \dots & -c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

cujos grafo das entradas prescritas é um ciclo monotonamente etiquetado. Atendendo à Proposição 3.4, sabemos que a desigualdade enunciada é válida.

Reciprocamente, admitamos que a condição referida é satisfeita. Seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \geq \max\{1, a_{1n}^{-1}, a_{12}^{-1}, a_{23}^{-1}, \dots, a_{n-1n}^{-1}\}$. Consideremos a matriz parcial

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n} \\ -b & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -b & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -b^{n-1} & ? & ? & \dots & -b & -1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que \tilde{A} é uma TNP -matriz parcial. Note-se que o seu grafo associado é um ciclo monotonaamente etiquetado. Dado que $a_{1n} \geq a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n}$ e $b^{n-1} \geq bb \dots b$, podemos concluir, atendendo à Proposição 3.4, que existe um TNP -completamento de \tilde{A} e, consequentemente, de A . \square

Voltando ao problema inicial, apresentamos, no seguinte resultado, condições necessárias e suficientes para que uma TNP -matriz parcial de ordem 3, cujo digrafo associado é um caminho totalmente especificado, admita TNP -matrizes como completamentos. Omitimos a demonstração por se basear, essencialmente, na demonstração do Lema 3.14 e num estudo de casos relativos às entradas especificadas nulas sem dificuldades maiores.

Lema 3.15. *Seja $A = (-a_{ij})_{i,j=1}^3$ uma TNP -matriz parcial cujo digrafo das entradas especificadas é o caminho totalmente especificado de arcos $(i, j), (j, k), (i, k)$. Então, A admite TNP -completamentos se e somente se são válidas as seguintes condições:*

1. $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ii}a_{jj} = 0$;
2. $a_{jk} = 0 \Rightarrow a_{jj}a_{kk} = 0$;
3. $a_{ik} = 0 \Rightarrow a_{ii}a_{kk} = 0$;
4. $(k \neq 2 \text{ e } a_{ik} = 0) \Rightarrow a_{ij}a_{kk} = 0$;
5. $(i \neq 2 \text{ e } a_{ik} = 0) \Rightarrow a_{jk}a_{ii} = 0$.

Estudemos, agora, o problema de completamento em causa para os ciclos dirigidos. Um ciclo $\Gamma : (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)$ num digrafo $D = (V, E)$, onde i_1, \dots, i_k são vértices distintos de V , diz-se *monotonaamente etiquetado* se $i_1 < \dots < i_k$ ou $i_1 > \dots > i_k$.

Exemplo 3.16. Consideremos a TNP -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0,1 & ? \\ ? & -1 & -1 \\ -1 & ? & -1 \end{bmatrix},$$

cujo digrafo das entradas especificadas é um ciclo dirigido. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$, consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -0,1 & -x \\ -y & -1 & -1 \\ -1 & -z & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Simples cálculos mostram que $\det A_c[\{1,2\}]$ e $\det A_c[\{2,3\}]$ são ambos não positivos se e só se $y \geq 10$ e $z \geq 1$. Assim, $\det A_c[\{2,3\}|\{1,2\}] = yz - 1 > 0$. Portanto, A não admite TNP -completamentos.

Tal como no caso dos caminhos totalmente especificados, é fácil de comprovar que a existência de elementos especificados nulos condiciona grandemente a existência do completamento desejado.

Apresentamos, no resultado que se segue, condições necessárias e suficientes para a existência de TNP -completamentos de TNP -matrizes parciais cujos digrafos das entradas especificadas são ciclos dirigidos monotonamente etiquetados e cujos elementos prescritos são não nulos. Sem perda de generalidade, consideraremos apenas TNP -matrizes parciais com os elementos da diagonal principal iguais a -1 , com todos os elementos prescritos distintos de 0 e com digrafo associado de arcos $(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n), (n,1)$.

Proposição 3.6. *Sejam $n > 2$ e*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & ? \\ ? & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & ? & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & ? & ? & \dots & ? & -1 \end{bmatrix}$$

uma TNP -matriz parcial, com $a_{ij} > 0$, para todo o i e todo o j . Então, A admite TNP -completamentos se e só se $a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n}a_{n1} \geq 1$.

Demonstração. Admitamos, primeiro, que existe um TNP -complementamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -c_{13} & \dots & -c_{1n-1} & -c_{1n} \\ -c_{21} & -1 & -a_{23} & \dots & -c_{2n-1} & -c_{2n} \\ -c_{31} & -c_{32} & -1 & \dots & -c_{3n-1} & -c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -c_{n-11} & -c_{n-12} & -c_{n-13} & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & -c_{n2} & -c_{n3} & \dots & -c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix}$$

de A , com todo o c_{ij} positivo. Note-se que A_c é, também, um TNP -complementamento da TNP -matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -c_{1n} \\ -c_{21} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -c_{32} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & ? & ? & \dots & -c_{nn-1} & -1 \end{bmatrix},$$

cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo não dirigido, monotonamente etiquetado. Atendendo à Proposição 3.4, sabemos que

$$a_{n1} \geq c_{21}c_{32} \dots c_{nn-1}.$$

Além disso,

$$1 - a_{ii+1}c_{i+1i} \leq 0,$$

ou seja, $c_{i+1i} \geq a_{ii+1}^{-1}$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Assim,

$$c_{21}c_{32} \dots c_{nn-1} \geq (a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n})^{-1}$$

e, portanto, a desigualdade enunciada é válida.

Reciprocamente, admitamos que a condição referida no enunciado é satisfeita. Consideremos a matriz parcial

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} \\ -a_{12}^{-1} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{23}^{-1} & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{n1} & ? & ? & \dots & -a_{n-1n}^{-1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $n = 3$, \tilde{A} é uma matriz totalmente especificada com todos os menores não positivos. Se $n > 3$, note-se que o grafo associado à matriz parcial é um ciclo dirigido, monotonamente etiquetado. Facilmente se verifica que \tilde{A} é uma

TNP -matriz parcial. Atendendo à Proposição 3.4, podemos afirmar que existe um TNP -completamento de \tilde{A} e, por conseguinte, de A . \square

Continuamos o estudo do problema de completamento em questão para determinados tipos de duplos ciclos.

Sejam $k, p \in \{1, \dots, n\}$ tais que $k + p < n$. Sejam

$$V_1 = \{1, \dots, k-1, k, k+1, \dots, k+p\}$$

e

$$V_2 = \{k, k+1, \dots, k+p, k+p+1, \dots, n\}.$$

Consideremos os digrafos $D_1 = (V_1, E_1)$ e $D_2 = (V_2, E_2)$, onde

$$E_1 = \{(1, 2), \dots, (k-1, k), (k, k+1), \dots, (k+p-1, k+p), (k+p, 1)\}$$

e

$$E_2 = \{(k, k+1), \dots, (k+p-1, k+p), (k+p, k+p+1), \dots, (n-1, n), (n, k)\}.$$

O digrafo $D = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ diz-se um *duplo ciclo monotonamente etiquetado com p arcos em comum*.

Lema 3.16. *Sejam $n > 3$ e*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & \dots & ? & ? & \dots & ? & \dots & ? \\ ? & -1 & \dots & ? & ? & \dots & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ ? & ? & \dots & -1 & -a_{kk+1} & \dots & ? & \dots & ? \\ ? & ? & \dots & ? & -1 & \dots & ? & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{k+p1} & ? & \dots & ? & ? & \dots & -a_{k+pk+p+1} & \dots & ? \\ ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & -1 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & ? & ? & \dots & ? & \dots & -a_{n-1n} \\ ? & ? & \dots & -a_{nk} & ? & \dots & ? & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

uma TNP -matriz parcial, com cada a_{ij} positivo. A admite TNP completamentos se e só se são válidas as desigualdades

1. $a_{12} \dots a_{k-1k} a_{kk+1} \dots a_{k+p-1k+p} a_{k+p1} \geq 1$;
2. $a_{kk+1} \dots a_{k+p-1k+p} a_{k+pk+p+1} \dots a_{n-1n} a_{nk} \geq 1$.

Demonstração. Se existe um TNP -completamento A_c de A , então a submatriz $A_c[\{1, \dots, k, \dots, k+p\}]$ é um TNP -completamento de $A[\{1, \dots, k, \dots, k+p\}]$, sendo o digrafo das entradas prescritas desta matriz parcial um ciclo dirigido monotonicamente etiquetado. Pela Proposição 3.6, podemos afirmar que a desigualdade 1 é válida. Analogamente, $A_c[\{k, \dots, k+p, k+p+1, \dots, n\}]$ é um TNP -completamento de $A[\{k, \dots, k+p, k+p+1, \dots, n\}]$, cujo digrafo das entradas especificadas é um ciclo dirigido monotonicamente etiquetado. Uma vez mais pela Proposição 3.6, podemos concluir que a desigualdade 2 é válida.

Reciprocamente, admitamos que se verificam as duas desigualdades enunciadas. Seja \bar{A} a TNP -matriz parcial cujas entradas são iguais às de A , excepto as entradas $(k, 1)$, igual a $-a_{kk+1} \dots a_{k+p-1k+p}a_{k+p1}$, $(k+p, k)$, igual a $-(a_{kk+1} \dots a_{k+p-1k+p})^{-1}$, $(n, k+p)$, igual a $-a_{kk+1} \dots a_{k+p-1k+p}a_{nk}$, e $(k+p, 1)$ e (n, k) , que não são prescritas. Os digrafos associados às submatrizes $\bar{A}[\{1, \dots, k\}]$, $\bar{A}[\{k, \dots, k+p\}]$ e $\bar{A}[\{k+p, \dots, n\}]$ são ciclos dirigidos monotonicamente etiquetados e facilmente se verifica, aplicando a Proposição 3.6, que tais submatrizes admitem TNP -completamentos B , C e D , respectivamente.

Seja $\bar{\bar{A}}$ a matriz obtida de \bar{A} completando as referidas submatrizes com os respectivos completamentos B , C e D . O grafo das entradas prescritas de $\bar{\bar{A}}$ é 1-cordal monotonicamente etiquetado e conexo. Assim, pelo Teorema 3.1 e pela sua demonstração, podemos assegurar a existência de um TNP -completamento A_c de $\bar{\bar{A}}$, cujas entradas $(k+p, 1)$ e (n, k) são, respectivamente, $-a_{k+p1}$ e $-a_{nk}$. Por conseguinte, A_c é um TNP -completamento de A . \square

Por fim, apresentamos um resultado que é consequência imediata de uma observação feita anteriormente. Um caminho dirigido $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ num digrafo $D = (V, E)$, onde i_1, \dots, i_k são vértices distintos de V , diz-se *monotonicamente etiquetado* se $i_1 < \dots < i_k$ ou $i_1 > \dots > i_k$.

Lema 3.17. *Seja A uma TNP -matriz parcial $n \times n$, não combinatorialmente simétrica, cujo digrafo das entradas especificadas é um caminho monotonicamente etiquetado e cujos elementos prescritos são não nulos. Então, A admite TNP -completamentos.*

Demonstração. Completando apenas submatrizes principais 2×2 , é possível obter uma TNP -matriz parcial combinatorialmente simétrica cujo grafo das entradas prescritas é um caminho não dirigido, monotonicamente etiquetado. \square

3.2 TNP_2 -matrizes parciais

A classe das TNP -matrizes está contida na classe das TNP_2 -matrizes, cujas submatrizes quadradas de ordem não superior a 2 têm determinante não positivo.

No estudo do problema de completamento de TNP -matrizes, deparamo-nos com algumas questões em aberto, sendo uma dessas questões relativa à completabilidade dos grafos p -cordais monotonamente etiquetados.

Os resultados que aqui apresentamos permitem-nos garantir a completabilidade desse tipo de grafos quando dirigimos o nosso estudo para as TNP_2 -matrizes parciais cujos elementos prescritos são não nulos. Tal como nos problemas anteriores, assumiremos que todas as entradas da diagonal principal são especificadas.

Definição 3.2. *Uma TNP_2 -matriz parcial é uma matriz parcial quadrada cujas submatrizes quadradas totalmente especificadas são TNP_2 -matrizes.*

Um TNP_2 -completamento de uma matriz parcial A será um completamento de A que é uma TNP_2 -matriz.

Começamos por considerar grafos p -cordais com dois cliques maximais com determinados conjuntos de vértices.

Lema 3.18. *Seja A uma TNP_2 -matriz parcial $n \times n$ que admite uma partição*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & X \\ A_{21} & A_{22} & a_{23} \\ Y & a_{32}^T & -1 \end{bmatrix},$$

onde A_{11} é uma matriz quadrada de ordem $(n-p-1)$ e A_{22} é uma matriz quadrada de ordem p , tal que todos os elementos da diagonal principal são distintos de 0 e cujas entradas não prescritas são exactamente as de X e de Y . Então, existe um TNP_2 -completamento de A .

Demonstração. Sejam

$$X = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_{n-p-1} \end{bmatrix}$$

e

$$Y = \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & \dots & -y_{n-p-1} \end{bmatrix}.$$

Consideremos a entrada $(n-p-1, n)$. Ao fixarmos um valor para x_{n-p-1} , as submatrizes parciais de ordem 2 que ficam completas são $A[\{n-p-1, i\}|\{j, n\}]$, com $(i, j) \in \{n-p, \dots, n-1\} \times \{1, \dots, n-1\}$ ou $(i, j) \in \{n\} \times \{n-p, \dots, n\}$. Facilmente se verifica que tais submatrizes são da forma

$$\begin{bmatrix} -a & -x_{n-p-1} \\ -b & -c \end{bmatrix},$$

com $a, b, c > 0$. Naturalmente, é possível atribuir um valor real positivo c_{n-p-1n} a x_{n-p-1} de modo a que todos os determinantes dessas submatrizes sejam não positivos. Seja A_1 a nova TNP_2 -matriz parcial obtida de A tomando $x_{n-p-1} = c_{n-p-1n}$.

Atendamos, agora, à entrada $(n, n-p-1)$ de A_1 . Ao fixarmos um valor para y_{n-p-1} , as submatrizes parciais de ordem 2 que ficam completas são $A_1[\{i, n\}|\{n-p-1, j\}]$, com $(i, j) \in \{1, \dots, n-1\} \times \{n-p, \dots, n-1\}$ ou $(i, j) \in \{n-p-1, \dots, n-1\} \times \{n\}$. Todas essas submatrizes parciais são da forma

$$\begin{bmatrix} -a & -b \\ -y_{n-p-1} & -c \end{bmatrix},$$

onde a, b, c são reais positivos. Logo, existe $c_{nn-p-1} > 0$ tal que, tomando $y_{n-p-1} = c_{nn-p-1}$, todos os menores relativos a tais submatrizes são não positivos. Seja A_2 a TNP_2 -matriz parcial obtida de A_1 completando a entrada $(n, n-p-1)$ com $-c_{nn-p-1}$.

Aplicando sequencialmente este procedimento, fixamos valores para x_{n-p-2} , y_{n-p-2} , x_{n-p-3} , y_{n-p-3} , \dots , x_2 , y_2 , x_1 , y_1 , por esta ordem, de modo a obter um TNP_2 -completamento de A . \square

Podemos generalizar este resultado da seguinte forma.

Lema 3.19. *Seja A uma TNP_2 -matriz parcial $n \times n$, cujo grafo das entradas especificadas é p -cordal monotonaemente etiquetado com dois cliques maximais e cujos elementos da diagonal principal são não nulos. Então, A admite TNP_2 -completamentos.*

Demonstração. A matriz parcial A admite uma partição

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & X \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ Y & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

onde as entradas não especificadas de A são as entradas de X e de Y , A_{22} é uma matriz $p \times p$ e os blocos

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

são de ordens n_1 e n_2 , respectivamente, sendo $n = n_1 + n_2 - p$.

Se $n_1 = 1$ ou $n_1 = n - 1$, o resultado segue do lema anterior. Nos restantes casos, podemos completar algumas das entradas de X e de Y , seguindo uma certa ordem, que explicaremos de seguida, por forma a obter uma TNP_2 -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é $(n_2 - 1)$ -cordal monotonaemente

etiquetado, com dois cliques maximais, tendo um $n - 1$ vértices e o outro n_2 vértices.

Denotemos por $-x_{ij}$ o elemento na entrada (i, j) , para $i = 1, \dots, n_1 - p - 1$ e $j = n_1 + 1, \dots, n$, e por $-y_{ij}$ o elemento na entrada (i, j) , para $i = n_1 + 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n_1$. Seguindo um raciocínio análogo ao apresentado na demonstração do resultado anterior, é possível fixar sequencialmente valores para $x_{n_2-p-1, n_1+1}, y_{n_1+1, n_2-p-1}, x_{n_2-p-2, n_1+1}, y_{n_1+1, n_2-p-2}, \dots, x_{1, n_1+1}, y_{n_1+1, 1}, \dots, x_{n_2-p-1, n-1}, y_{n-1, n_2-p-1}, x_{n_2-p-2, n-1}, y_{n-1, n_2-p-2}, \dots, x_{1, n-1}, y_{n-1, 1}$, de modo a obter uma TNP_2 -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é um grafo $(n_2 - 1)$ -cordal monotonicamente etiquetado, com dois cliques maximais. Pelo lema anterior, existe, então, um TNP_2 -completamento de A . \square

Por indução no número de cliques maximais, podemos obter o resultado que se segue.

Proposição 3.7. *Seja G um grafo cordal conexo, não dirigido. Então, qualquer TNP_2 -matriz parcial cujo grafo das entradas especificadas é G e cujos elementos da diagonal principal são não nulos admite TNP_2 -completamentos.*

Capítulo 4

Completamentos de matrizes parciais com menores principais positivos

Uma P -matriz é uma matriz quadrada sobre o corpo dos reais cujos menores principais são todos positivos. O problema de completamento de P -matrizes parciais foi já abordado por vários autores e surge, de certa forma, como impulsionador de toda uma série de problemas de completamento de matrizes envolvendo propriedades de determinantes. Neste capítulo, abordamos problemas de completamento de determinadas classes de matrizes em que menores principais positivos são um denominador comum. Começamos por apresentar uma breve descrição dos resultados mais significativos relativos ao problema de completamento de P -matrizes parciais existentes até ao momento.

Numa segunda secção, temos como base as P_k -matrizes. Uma P_k -matriz é uma matriz quadrada, com entradas em \mathbb{R} , cujas submatrizes principais de ordem não superior a k têm determinante positivo. Consideramos o problema de completamento de P_k -matrizes, abordando o problema de completamento em questão no caso combinatorialmente simétrico. É sabido, de [36], que toda a P -matriz parcial combinatorialmente simétrica admite P -completamentos. Obtemos aqui a generalização desse resultado para as P_k -matrizes parciais.

Na secção seguinte, apresentamos uma pequena nota sobre a questão de completamento de M -matrizes parciais cujo grafo associado é um caminho. Por fim, analisamos o problema de completamento de DN -matrizes parciais relacionado com as matrizes duplamente negativas. Provamos que todas as DN -matrizes parciais cujo grafo associado é um grafo cordal G admitem DN -completamentos se e só se G é 1-cordal. Abordamos, ainda, o problema de completamento no caso em que o grafo associado à matriz parcial é um ciclo.

4.1 O problema de completamento de P -matrizes parciais: antecedentes e estado actual

Analizamos, nesta secção, o problema de completamento que serve de motivação aos problemas considerados nas restantes secções deste capítulo: o problema de completamento de P -matrizes parciais.

Como base deste nosso estudo temos as matrizes reais quadradas cujos menores principais são positivos – as P -matrizes.

Pretendemos estudar a existência de completamentos de uma dada matriz parcial quadrada que sejam P -matrizes, os chamados P -completamentos. Relembramos que toda a submatriz principal de uma P -matriz é, ainda, uma P -matriz. Assim, para que uma matriz parcial admita P -completamentos, todas as suas submatrizes principais totalmente especificadas terão de ser P -matrizes. Introduzimos, pois, de forma natural, a definição que se segue.

Definição 4.1. *Uma matriz parcial quadrada diz-se uma P -matriz parcial se qualquer submatriz principal totalmente especificada é uma P -matriz.*

Exemplo 4.1. A matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ? \\ 0,3 & 2 & -1 \\ ? & -5 & ? \end{bmatrix}$$

é uma P -matriz parcial, uma vez que as submatrizes principais $A[\{1\}]$, $A[\{2\}]$ e $A[\{1,2\}]$ têm determinante positivo. Por outro lado, a matriz parcial

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ? \\ 0 & 2 & 1 \\ ? & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

não é uma P -matriz parcial, dado que $\det B[\{3\}] = -1 < 0$.

No estudo deste problema de completamento podemos assumir, sem perda de generalidade, que todas as entradas da diagonal principal são especificadas – caso contrário, o problema reduz-se ao estudo da existência de um P -completamento da submatriz principal que contém todos os elementos especificados da diagonal principal. DeAlba e Hogben apresentam, em [9], uma prova deste facto.

Também sem perda de generalidade, podemos restringir a nossa análise às P -matrizes parciais cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1. Com efeito, dada uma P -matriz parcial $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, basta-nos considerar o produto DA , sendo $D = \text{diag}(a_{11}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$. Note-se que DA é, ainda, uma P -matriz parcial – recordemos que a classe das P -matrizes é invariante para a multiplicação

diagonal positiva – e facilmente se verifica que todos os elementos da diagonal principal de DA são iguais a 1. Claramente, A admite P -completamentos se e somente se os admite DA .

Podemos, ainda, supor, sem perda de generalidade, que o grafo associado à matriz parcial é conexo. De facto, se o grafo das entradas especificadas de uma dada matriz parcial A tem p componentes conexas, então, a menos de semelhança de permutação, A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & X_{12} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & A_{22} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & X_{p2} & \dots & A_{pp} \end{bmatrix},$$

onde cada A_{ii} é uma matriz parcial, correspondente a uma componente conexa do grafo, e cada X_{ij} é uma matriz totalmente não especificada. Hogben demonstra, em [28], que A admite um P -completamento se e só se cada uma das submatrizes A_{ii} admite um P -completamento.

Apresentamos, de seguida, um breve resumo dos resultados de completamento de P -matrizes parciais obtidos até ao momento.

Como já referimos anteriormente, este problema foi inicialmente proposto por Johnson e Kroschel, em 1996 (ver [36]). Nesse trabalho, os autores mostram que toda a P -matriz parcial 3×3 admite um P -completamento. No estudo do problema em questão para matrizes parciais de ordem superior a 3, os referidos autores provam, ainda, que nem sempre é possível encontrar o completamento desejado, como podemos comprovar com o exemplo que se segue.

Exemplo 4.2. A matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & ? & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0,5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma P -matriz parcial 4×4 que não admite P -completamentos. De facto, dado $x \in \mathbb{R}$ e o completamento A_x de A obtido completando a entrada $(1, 2)$ com x , temos que

$$\det A_x [\{1, 2, 3\}] > 0 \Leftrightarrow x > -5/3$$

e

$$\det A_x [\{1, 3, 4\}] > 0 \Leftrightarrow x < -2.$$

Portanto, estes dois menores não são simultaneamente positivos para qualquer valor de x .

Podemos obter, com base na matriz parcial A , uma P -matriz parcial $n \times n$, $n \geq 5$, que não admite P -completamentos: basta considerar a matriz parcial B cuja submatriz principal $B[\{1, 2, 3, 4\}]$ é igual a A e tal que todos os elementos da diagonal principal são especificados e iguais a 1, sendo as restantes entradas também especificadas e iguais a 0.

Tendo em conta este facto, para dar continuidade a este estudo do problema de completamento de P -matrizes parciais, foi necessário introduzir algum tipo de restrições sobre o padrão da matriz.

Johnson e Kroschel apresentam, ainda em [36], o seguinte resultado respeitante a matrizes parciais combinatorialmente simétricas:

Teorema 4.1. *Toda a P -matriz parcial combinatorialmente simétrica admite P -completamentos.*

Do trabalho atrás referido sabemos, então, que toda a P -matriz parcial combinatorialmente simétrica admite P -completamentos, tal como toda a P -matriz parcial 3×3 não combinatorialmente simétrica. Sabemos, ainda, que, em geral, não existe um P -completamento de uma P -matriz parcial não combinatorialmente simétrica de ordem superior ou igual a 4.

Naturalmente, na sequência deste trabalho de Johnson e Kroschel, o estudo deste problema tem sido abordado por vários autores, procurando determinar o tipo de padrões das P -matrizes parciais não combinatorialmente simétricas $n \times n$, $n \geq 4$, que admitem P -completamentos e, para os padrões que não admitem P -completamentos, apresentar condições sobre as entradas especificadas da matriz parcial por forma a garantir a existência do completamento desejado.

Nesses tais trabalhos, posteriores ao de Johnson e Kroschel, inicia-se o estudo do problema de completamento de P -matrizes parciais introduzindo restrições sobre o sinal dos elementos da matriz parcial tais como a positividade da matriz parcial (todas as entradas especificadas são positivas), a não negatividade da matriz parcial (todas as entradas especificadas são não negativas), a simetria de sinal (todas as entradas especificadas que ocupam posições simétricas têm o mesmo sinal ou são ambas nulas) e a simetria de sinal fraca (o produto das entradas especificadas que ocupam posições simétricas é não negativo).

Tendo em conta estas restrições, deparamo-nos com as seguintes questões derivadas do problema de completamento de P -matrizes parciais: dada uma

P -matriz parcial positiva (respectivamente não negativa, sinal-simétrica, fracamente sinal-simétrica) A , existe um completamento A_c de A tal que A_c é uma P -matriz positiva (respectivamente não negativa, sinal-simétrica, fracamente sinal-simétrica)?

Seguindo a metodologia do problema mais geral, Fallat, Johnson, Torregrosa e Urbano abordam este problema em [13]. Estes autores mostram que toda a P -matriz parcial positiva 3×3 tem um P -completamento positivo. Facilmente se verifica que o resultado análogo é válido quando consideramos as P -matrizes parciais não negativas. No entanto, não temos resultados análogos para as restantes subclasses das P -matrizes parciais atrás referidas, como mostra o exemplo que se segue.

Exemplo 4.3. Consideremos a P -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ? \\ 0,1 & 1 & -3 \\ 1 & -0,2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que A é sinal-simétrica e, por conseguinte, A é fracamente sinal-simétrica. Dados um real x e o completamento A_x de A obtido completando a entrada $(1, 3)$ com x , temos que $\det A_x = -5,8 - 1,02x$. Para que A_x seja sinal-simétrica (respectivamente fracamente sinal-simétrica), x terá de ser positivo (respectivamente não negativo). Nesse caso, o determinante de A_x será negativo. Portanto, A não admite P -completamentos (fracamente) sinal-simétricos.

Dada uma P -matriz parcial positiva (respectivamente sinal-simétrica, fracamente sinal-simétrica) A , de ordem superior a 3, não podemos, em geral, garantir a existência de uma P -matriz positiva (respectivamente sinal-simétrica, fracamente sinal-simétrica) que seja um completamento de A . Atendamos aos seguintes exemplos.

Exemplo 4.4. *A seguinte P -matriz parcial*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,065 & 1 & ? \\ 15 & 1 & 4 & 0,96 \\ 0,5 & 0,125 & 1 & 0,045 \\ 13 & 1 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

não admite P -completamentos, uma vez que, dado $x \in \mathbb{R}$, o completamento

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0,065 & 1 & x \\ 15 & 1 & 4 & 0,96 \\ 0,5 & 0,125 & 1 & 0,045 \\ 13 & 1 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

de A é tal que

$$\det A_x [\{1, 2, 4\}] > 0 \Leftrightarrow x > 0,0619$$

e

$$\det A_x [\{1, 3, 4\}] > 0 \Leftrightarrow x < 0.185/3 \approx 0,06167.$$

A matriz parcial do exemplo anterior é não combinatorialmente simétrica. Os exemplos que se seguem dizem respeito ao caso combinatorialmente simétrico.

Exemplo 4.5. Consideremos a seguinte P -matriz parcial positiva

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,6 & ? \\ 0,3 & 1 & 1 & 0,02 \\ 0,05 & 0,5 & 1 & 1 \\ ? & 0,04 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que A é combinatorialmente simétrica. Vejamos que esta matriz parcial não admite P -completamentos positivos. Para tal, consideremos o completamento $A_{x,y}$ de A obtido completando as entradas $(1, 4)$ e $(4, 1)$ com reais positivos x e y , respectivamente. Como $\det A_{x,y} = -0,003476 - 0,04x - 0,386y - 0,5xy$, podemos, de facto, afirmar que A não admite P -completamentos positivos.

Exemplo 4.6. Facilmente se verifica que a seguinte matriz parcial combinatorialmente simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1,6 & ? \\ 0,963 & 1 & 1 & -5 \\ 0,032 & 0,0001 & 1 & 1 \\ ? & -0,008 & 0,95 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma P -matriz parcial sinal-simétrica (e, por conseguinte, fracamente sinal-simétrica). Dados $x, y \in \mathbb{R}$, seja $A_{x,y}$ o completamento de A obtido completando as entradas $(1, 4)$ e $(4, 1)$ com x e y , respectivamente. Simples cálculos permitem-nos afirmar que

$$\det A_{x,y} [\{1, 3, 4\}] = -0,0012 + 0,0304x + 1,6y - xy$$

e

$$\det A_{x,y} [\{1, 2, 4\}] = -0,003 - 0,007704x - 5y - xy.$$

Assim, se x e y são ambos negativos, $\det A_{x,y} [\{1, 3, 4\}] < 0$. Se x e y são ambos positivos, então é negativo o determinante de $A_{x,y} [\{1, 2, 4\}]$. Se $x = y = 0$, segue-se que são negativos os dois menores principais referidos. Portanto, $A_{x,y}$ não é uma P -matriz sinal-simétrica independentemente dos valores de x e de y . Se apenas x é nulo, facilmente se verifica que um dos menores principais considerados é negativo. Verifica-se uma situação análoga no caso em que apenas y é nulo. Logo, A também não admite P -completamentos fracamente sinal-simétricos.

Em todos os casos abordados até ao momento em que a resposta ao problema de completamento é, em geral, negativa, podemos colocar a seguinte questão: que tipos de padrão garantem a existência de um P -completamento positivo (respectivamente sinal-simétrico, fracamente sinal-simétrico) de uma P -matriz parcial positiva (respectivamente sinal-simétrica, fracamente sinal-simétrica)? Encontramos, em [13] e em [52], respostas parciais a esta questão.

Relativamente aos grafos cordais, Fallat *et al* apresentam o resultado que se segue (ver [13]):

Teorema 4.2. *Seja G um grafo cordal não dirigido. Então, toda a P -matriz parcial positiva (respectivamente sinal-simétrica, fracamente sinal-simétrica), cujo grafo das entradas especificadas é G , admite um P -completamento positivo (respectivamente sinal-simétrico, fracamente sinal-simétrico) se e somente se G é um grafo 1-cordal.*

Quando o grafo associado a uma P -matriz parcial combinatorialmente simétrica não é cordal, sabemos que contém, como subgrafo induzido, um ciclo de comprimento maior ou igual a 4. Considerando os padrões descritos por ciclos, encontramos, ainda em [13], o seguinte resultado:

Teorema 4.3. *Seja A uma P -matriz parcial positiva $n \times n$, com $n \geq 4$, cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo não dirigido. Então, existe um completamento A_c de A que é uma P -matriz positiva.*

No trabalho atrás referido, os autores mostram que não é válido, em geral, o resultado análogo ao anterior para as P -matrizes parciais sinal-simétricas 4×4 .

Na continuação deste estudo, encontramos, em [10], o seguinte resultado:

Teorema 4.4. *Toda a P -matriz parcial sinal-simétrica (respectivamente fracamente sinal-simétrica) $n \times n$, combinatorialmente simétrica, cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo de comprimento n , admite um P -completamento sinal-simétrico (respectivamente fracamente sinal-simétrico) se e somente se $n \neq 4$ e $n \neq 5$.*

Até ao momento, são estes os principais resultados conhecidos para o problema de completamento de P -matrizes parciais positivas (respectivamente sinal-simétricas, fracamente sinal-simétricas) combinatorialmente simétricas.

Relativamente ao caso não combinatorialmente simétrico, Jórdan, Torregrosa e Urbano apresentam, em [52], uma análise do problema em função do tipo de grafo associado às entradas prescritas da matriz parcial.

Neste último trabalho, encontramos o seguinte resultado relativo a grafos acíclicos:

Teorema 4.5. *Seja A uma P -matriz parcial positiva (respectivamente sinal-simétrica), não combinatorialmente simétrica, cujo grafo associado é acíclico. Então, existe um P -completamento positivo (respectivamente sinal-simétrico) A_c de A .*

Para o caso de grafos dirigidos não acíclicos, os autores apresentam o resultado que se segue:

Teorema 4.6. *Seja A uma P -matriz parcial positiva cujo digrafo associado é um digrafo CDUM. Então, A admite P -completamentos positivos.*

Como consequência directa deste teorema surge o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *Toda a P -matriz parcial positiva cujo digrafo das entradas especificadas é um ciclo admite P -completamentos positivos.*

Relativamente ao problema de completamento de P -matrizes parciais sinal-simétricas, o facto de o digrafo associado à matriz parcial ser CDUM não é suficiente para garantir a existência do completamento desejado, como podemos comprovar no exemplo que se segue.

Exemplo 4.7. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ? \\ ? & 1 & 1 \\ -2 & ? & 1 \end{bmatrix}.$$

Obviamente, A é uma P -matriz parcial sinal-simétrica. Note-se que o grafo dirigido associado a A é um digrafo CDUM. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, definimos o completamento $A_{x,y,z}$ de A como

$$A_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -x \\ y & 1 & 1 \\ -2 & z & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que $\det A_{x,y,z} = -1 - xyz - 2x - y - z$, $A_{x,y,z}$ não é uma P -matriz, independentemente dos valores escolhidos para x, y, z em \mathbb{R}^+ . Portanto, A não admite o completamento desejado.

Motivados por todos estes estudos desenvolvidos com base no problema de completamento de P -matrizes parciais, apresentamos, nas secções que se seguem, algumas respostas a questões relativas a problemas de completamento muito próximos.

4.2 P_k -matrizes parciais

Ao longo desta secção, k denota um número inteiro positivo.

Relembremos que uma P_k -matriz é uma matriz cujas submatrizes principais de ordem não superior a k têm determinante positivo. Como já referimos anteriormente, toda a submatriz principal de uma P_k -matriz é, ainda, uma P_k -matriz. Definimos, então, as P_k -matrizes parciais.

Definição 4.2. *Uma matriz parcial quadrada diz-se uma P_k -matriz parcial se todas as suas submatrizes principais totalmente especificadas são P_k -matrizes.*

Exemplo 4.8. A matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & ? & 2 \\ 1 & 1 & ? & 0,01 \\ ? & 1 & 1 & 1 \\ 0,1 & -3 & ? & 1 \end{bmatrix}$$

é uma P_2 -matriz parcial, uma vez que todas as submatrizes principais totalmente especificadas de ordem não superior a 2 têm determinante positivo. Consequentemente, A é, também, uma P_1 -matriz parcial. No entanto, A não é uma P_3 -matriz parcial. De facto, $\det A[\{1, 2, 4\}] < 0$. Por conseguinte, A não é uma P_k -matriz para $k \geq 3$.

Consideramos o problema de completamento de P_k -matrizes, assumindo que todas as entradas diagonais são especificadas e abordando o caso combinatorialmente simétrico. Chamamos P_k -completamento de uma matriz parcial A a qualquer completamento de A que seja uma P_k -matriz.

Dado que a classe das P_k -matrizes é invariante para as semelhanças de permutação e diagonais, bem como para a multiplicação diagonal positiva, estas são transformações admissíveis no contexto das P_k -matrizes parciais.

Pelo Teorema 4.1, sabemos que toda a P -matriz parcial combinatorialmente simétrica admite P -completamentos. Os resultados que se seguem generalizam este facto.

Lema 4.1. *Toda a P_k -matriz parcial com exactamente um par de entradas não especificadas admite P_k -completamentos.*

Demonstração. Seja A uma P_k -matriz parcial $n \times n$ com exactamente um par de entradas não especificadas simetricamente posicionadas. Podemos assumir, sem perda de generalidade, por multiplicação diagonal positiva e por semelhança de permutação, que todas as entradas diagonais são iguais a 1 e que as entradas não

especificadas são $(1, n)$ e $(n, 1)$. Se $n \leq k + 1$, então A é uma P -matriz parcial, pelo que admite P -completamentos, que são, também, P_k -matrizes.

Admitamos, então, que $n > k + 1$. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, consideremos o completamento $A_{x,y}$ de A obtido completando a entrada $(1, n)$ com x e a entrada $(n, 1)$ com y . Pretendemos mostrar que existem x, y tais que $\det A_{x,y}[\beta] > 0$, para todo o subconjunto β de $\{1, \dots, n\}$ tal que $|\beta| \leq k$. Resta-nos verificar, para tal, que existem x, y tais que $\det A_{x,y}[\{1, n\} \cup \alpha] > 0$ para todo o subconjunto α de $\{2, \dots, n-1\}$ tal que $|\alpha| \leq k-2$. Denotemos por A_0 o completamento $A_{0,0}$ de A e seja $\alpha \subseteq \{2, \dots, n-1\}$ tal que $|\alpha| \leq k-2$. Temos que $A_{x,y}[\{1, n\} \cup \alpha]$ é da forma

$$A_{x,y}[\{1, n\} \cup \alpha] = \begin{bmatrix} 1 & u^T & x \\ v & A[\alpha] & w \\ y & z^T & 1 \end{bmatrix},$$

onde $u^T = A[\{1\}|\alpha]$, $v = A[\alpha|\{1\}]$, $w = A[\alpha|\{n\}]$ e $z^T = A[\{n\}|\alpha]$.

Assim,

$$\begin{aligned} \det A_{x,y}[\{1, n\} \cup \alpha] &= \det \begin{bmatrix} 1 & u^T & x \\ v & A[\alpha] & 0 \\ y & z^T & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & u^T & 0 \\ v & A[\alpha] & w \\ y & z^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{|\alpha|+1} x \det \begin{bmatrix} v & A[\alpha] \\ y & z^T \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & u^T & 0 \\ v & A[\alpha] & w \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \det \begin{bmatrix} 1 & u^T & 0 \\ v & A[\alpha] & w \\ 0 & z^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{|\alpha|+1} x \left(\det \begin{bmatrix} v & A[\alpha] \\ y & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} v & A[\alpha] \\ 0 & z^T \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|+1} y \det \begin{bmatrix} u^T & 0 \\ A[\alpha] & w \end{bmatrix} + \det A_0[\{1, n\} \cup \alpha] \\ &= (-1)^{2|\alpha|+1} xy \det A[\alpha] + (-1)^{|\alpha|+1} x \det A_0[\alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \alpha] \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|+1} y \det A_0[\{1\} \cup \alpha|\alpha \cup \{n\}] + \det A_0[\{1, n\} \cup \alpha]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \det A_{x,-x}[\{1, n\} \cup \alpha] &= x^2 \det A[\alpha] + (-1)^{|\alpha|+1} x \det A_0[\alpha \cup \{n\}|\{1\} \cup \alpha] \\ &\quad + (-1)^{|\alpha|} x \det A_0[\{1\} \cup \alpha|\alpha \cup \{n\}] + \det A_0[\{1, n\} \cup \alpha]. \end{aligned}$$

Observe-se que $\det A_{x,-x}[\{1, n\} \cup \alpha]$ é um polinómio de grau 2, em x , com coeficiente director positivo. Podemos, então, afirmar que, para cada α , existe M_α tal que $\det A_{x,-x}[\{1, n\} \cup \alpha] > 0$ para todo o $x > M_\alpha$. Seja

$$M = \max\{M_\alpha \mid \alpha \subseteq \{2, \dots, n-1\}, |\alpha| \leq k-2\}.$$

Então, dado $x > M$, $\det A_{x,-x}[\{1, n\} \cup \alpha] > 0$, para todo o subconjunto α de $\{2, \dots, n-1\}$ tal que $|\alpha| \leq k-2$. Portanto, $A_{x,-x}$ é um P_k -completamento de A se $x > M$. \square

O lema anterior pode ser aplicado sequencialmente de modo a obter um P_k -completamento de uma qualquer P_k -matriz parcial combinatorialmente simétrica.

Proposição 4.1. *Toda a P_k -matriz parcial combinatorialmente simétrica admite P_k -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução no número p de pares de entradas não especificadas posicionalmente simétricas.

Seja A uma P_k -matriz parcial combinatorialmente simétrica com p pares de entradas não especificadas posicionalmente simétricas.

Consideremos um par de entradas não especificadas posicionalmente simétricas e todas as submatrizes principais maximais $A[\alpha_1], \dots, A[\alpha_s]$ que este par completa. Cada $A[\alpha_i]$, $i = 1, \dots, s$, é, portanto, uma P_k -matriz parcial com um só par de entradas não especificadas posicionalmente simétricas. Assim, pelo resultado anterior, cada $A[\alpha_i]$ pode ser completada de modo a obter-se uma P_k -matriz com um par de entradas $(x_i, -x_i)$ para qualquer x_i maior que um determinado real M_i . Sejam $M = \max\{M_i \mid i = 1, \dots, s\}$ e $x > M$. Completeemos cada uma destas submatrizes com o par $(x, -x)$. Obtemos uma P_k -matriz parcial \bar{A} combinatorialmente simétrica com $p-1$ pares de entradas não especificadas posicionalmente simétricas. Pela hipótese de indução, \bar{A} admite um P_k -completamento que é, também, um completamento de A . \square

Sabemos, de [36], que toda a P -matriz parcial 3×3 admite P -completamentos. Assim sendo, facilmente se verifica que toda a P_k -matriz parcial 3×3 admite P_k -completamentos.

O mesmo não se passa com as P_k -matrizes parciais 4×4 . De facto, se $k < 3$, podemos garantir a existência de um P_k -completamento de tais matrizes parciais, mas, para $k = 3$ ou $k = 4$, temos o seguinte contraexemplo, apresentado no referido trabalho de Johnson e Kroschel para o problema de completamento de P -matrizes.

Exemplo 4.9. Consideremos a P_3 -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ ? & -10 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e o seu completamento A_x obtido completando a entrada $(4, 1)$ com x . Para que $A_x[\{1, 2, 4\}]$ seja positivo, é necessário que $x < -3,5$. Para que o menor $A_x[\{1, 3, 4\}]$ seja, também, positivo, temos de ter $x > -3$. Logo, não existe um P_3 -completamento de A . Note-se que A é, ainda, uma P_4 -matriz parcial e, pelas mesmas razões, A não admite P_4 -completamentos.

Passando para o caso não combinatorialmente simétrico e analisando P_k -matrizes parciais cujos digrafos associados são acíclicos, ciclos, semiciclos ou duplos ciclos, facilmente se pode verificar que tais matrizes parciais são, também, P -matrizes sempre que $k \geq 2$. Portanto, a análise destes padrões é, de certa forma, trivial.

4.3 Uma nota sobre M -matrizes parciais

O problema de completamento abordado nesta secção tem por base as M -matrizes. Relembremos que uma matriz A com entradas não diagonais não positivas é uma M -matriz se e somente se todos os menores principais de A são positivos. Por outras palavras, uma M -matriz é uma P -matriz com entradas não diagonais não positivas.

O problema de completamento de M -matrizes é, em certo sentido, trivial. Começemos por apresentar a definição de M -matriz parcial.

Definição 4.3. *Uma matriz parcial quadrada diz-se uma M -matriz parcial se todas as submatrizes principais totalmente prescritas são M -matrizes e se todas as entradas não diagonais especificadas são não positivas.*

Exemplo 4.10. Facilmente se verifica que a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? \\ -0,5 & 1 & -4 \\ 0 & ? & 1 \end{bmatrix}$$

é uma M -matriz parcial. Pelo contrário, a matriz parcial

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? \\ -0,5 & 1 & -4 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix}$$

não é uma M -matriz, apesar de ser uma P -matriz. Com efeito, o elemento na posição $(3, 1)$ é positivo.

Podemos enunciar o problema de completamento de M -matrizes parciais do seguinte modo: dada uma M -matriz parcial A de tamanho $n \times n$, existe um completamento A_c de A que é uma M -matriz?

Chamamos *M-completamento* a qualquer completamento de uma matriz parcial que seja uma *M*-matriz.

No estudo do problema de completamento de *M*-matrizes parciais, podemos supor, sem perda de generalidade, que todas as entradas da diagonal principal são especificadas. Com efeito, no caso contrário, o problema reduz-se a analisar a existência de um *M*-completamento da submatriz principal que contém todas as entradas da diagonal principal prescritas.

É um resultado conhecido que a classe das *M*-matrizes é invariante para a multiplicação diagonal positiva, isto é, se D é uma matriz diagonal positiva e A é uma *M*-matriz, então AD , DA são, também, *M*-matrizes. Nesse sentido, podemos assumir que todas as entradas diagonais de uma *M*-matriz parcial são iguais a 1.

Outro aspecto relevante para este nosso estudo traduz-se no facto de a classe das *M*-matrizes ser invariante para a semelhança diagonal positiva ou negativa, ou seja, dadas uma matriz diagonal D positiva ou negativa e uma *M*-matriz A , DAD^{-1} é, também, uma *M*-matriz. Podemos, pois, assumir que os elementos especificados da diagonal superior não nulos são iguais a -1 .

Tal como no caso das *P*-matrizes parciais, o problema de completamento de *M*-matrizes parciais reduz-se ao estudo da existência do completamento desejado de *M*-matrizes parciais cujos grafos associados são conexos. De facto, se o grafo contém p componentes conexas, a existência de um *M*-completamento de cada uma das submatrizes principais associadas a cada uma dessas componentes conexas garante a existência de um *M*-completamento da matriz parcial dada.

Johnson e Smith notam, em [39], que o completamento nulo é a chave da resolução deste problema de completamento de matrizes.

Teorema 4.7. *Seja A uma *M*-matriz parcial. A admite *M*-completamentos se e somente se A_0 é uma *M*-matriz.*

O problema atrás mencionado fica, assim, resolvido de forma implícita. A questão que surge, naturalmente, prende-se com o tipo de estruturas da matriz parcial que nos permitem garantir a existência do completamento desejado.

Em [26], Hogben analisa o problema de completamento de *M*-matrizes parciais para o caso não combinatorialmente simétrico, apresentando o seguinte resultado.

Teorema 4.8. *Dado um grafo dirigido D , toda a *M*-matriz parcial não combinatorialmente simétrica cujo digrafo associado é D admite um *M*-completamento*

se e só se para qualquer subgrafo fortemente conexo H de D , toda a M -matriz parcial não combinatorialmente simétrica cujo digrafo das entradas especificadas é H admite um M -completamento.

Observe-se que este resultado se baseia numa caracterização combinatorial e não matricial no sentido em que existem matrizes parciais que admitem M -completamentos mas cujo digrafo associado não verifica a condição do teorema anterior. Neste contexto, deparamo-nos com várias questões em aberto.

Dirigimos, agora, o nosso estudo para o problema de completamento de M -matrizes parciais cujos grafos das entradas especificadas são caminhos combinatorialmente simétricos.

Este caso particular pode ser reduzido ao caso em que todas as entradas da diagonal superior são negativas.

De facto, se A é uma M -matriz parcial combinatorialmente simétrica $n \times n$ cujo grafo das entradas especificadas é um caminho e tal que a entrada $(i, i + 1)$ é nula para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, então A admite M -completamentos se e só se as matrizes parciais $B = A[\{1, \dots, i\}]$ e $C = A[\{i + 1, \dots, n\}]$ admitem M -completamentos, uma vez que A_0 será uma matriz triangular por blocos em que os blocos diagonais são as matrizes B_0 e C_0 . Note-se que uma matriz triangular por blocos cujos blocos diagonais são M -matrizes é, ainda, uma M -matriz.

O nosso objectivo, nesta secção, é mostrar que podemos reduzir o número de menores principais do completamento nulo calculados para verificar se uma dada M -matriz parcial com o grafo associado do tipo referido admite ou não os completamentos desejados.

Tendo em conta as observações anteriores, assumimos, nos resultados que se seguem, que todas as entradas da diagonal superior são não nulas.

Lema 4.2. *Uma M -matriz parcial A $n \times n$, com $n \leq 5$, cujo grafo associado é um caminho, admite M -completamentos se e somente se $\det A_0 > 0$.*

Demonstração. Dada uma M -matriz parcial A $n \times n$ cujo grafo associado é um caminho, podemos admitir, sem perda de generalidade (por multiplicação diagonal positiva e por semelhança diagonal positiva), que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? & \dots & ? & ? \\ -a_{21} & 1 & -1 & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{32} & 1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & 1 & -1 \\ ? & ? & ? & \dots & -a_{nn-1} & 1 \end{bmatrix},$$

com $0 \leq a_{i+1i} < 1$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Os casos em que $n \leq 3$ são triviais.

Estudemos o caso em que $n = 4$. Dada uma M -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? & ? \\ -a_{21} & 1 & -1 & ? \\ ? & -a_{32} & 1 & -1 \\ ? & ? & -a_{43} & 1 \end{bmatrix},$$

com $0 \leq a_{21}, a_{32}, a_{43} < 1$, sabemos que se A admite M -completamentos, então o completamento

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

de A é uma M -matriz. Assim, se A admite M -completamentos, é óbvio que $\det A_0 > 0$. Mostremos, agora, que $\det A_0 > 0$ é uma condição suficiente para que A admita M -completamentos.

Atendendo a que

$$\det A_0 = 1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} + a_{21}a_{43},$$

podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \det A_0 [\{1, 2, 3\}] &= 1 - a_{21} - a_{32} \\ &> a_{43}(1 - a_{21}) \geq 0 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \det A_0 [\{2, 3, 4\}] &= 1 - a_{32} - a_{43} \\ &> a_{21}(1 - a_{43}) \geq 0. \end{aligned}$$

Os restantes menores principais são determinantes de uma matriz identidade ou iguais a determinantes de submatrizes principais totalmente especificadas de A . Portanto, são positivos.

Vimos, deste modo, que $\det A_0 [\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Logo, A_0 é uma M -matriz e, por conseguinte, A admite M -completamentos.

Consideremos, agora, a M -matriz parcial 5×5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? & ? & ? \\ -a_{21} & 1 & -1 & ? & ? \\ ? & -a_{32} & 1 & -1 & ? \\ ? & ? & -a_{43} & 1 & -1 \\ ? & ? & ? & -a_{54} & 1 \end{bmatrix},$$

com $0 \leq a_{21}, a_{32}, a_{43}, a_{54} < 1$. É claro que $\det A_0 > 0$ se A admite M -matrizes como complementamentos. Admitamos, agora, que $\det A_0 > 0$. Pretendemos mostrar que A_0 é uma M -matriz.

Vejamos que $\det A_0 [\{1, 2, 3, 4\}] > 0$ e que $\det A_0 [\{2, 3, 4, 5\}] > 0$. Sabemos que

$$\det A_0 = 1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} - a_{54} + a_{21}a_{43} + a_{21}a_{54} + a_{32}a_{54}.$$

Podemos, então, afirmar que

$$\begin{aligned} \det A_0 [\{1, 2, 3, 4\}] &= 1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} + a_{21}a_{43} \\ &> a_{54}(1 - a_{21} - a_{32}) \end{aligned}$$

e que

$$(1 - a_{21} - a_{32})(1 - a_{54}) > a_{43}(1 - a_{21}) \geq 0.$$

Sendo $1 - a_{54} > 0$, também $1 - a_{21} - a_{32} > 0$, donde $a_{54}(1 - a_{21} - a_{32}) \geq 0$. Portanto, $\det A_0 [\{1, 2, 3, 4\}] > 0$. Sabemos, ainda, que

$$\begin{aligned} \det A_0 [\{2, 3, 4, 5\}] &= 1 - a_{32} - a_{43} - a_{54} + a_{32}a_{54} \\ &> a_{21}(1 - a_{43} - a_{54}) \end{aligned}$$

e que

$$(1 - a_{43} - a_{54})(1 - a_{21}) > a_{32}(1 - a_{54}) \geq 0.$$

Como $1 - a_{21} > 0$, segue-se que $1 - a_{43} - a_{54} > 0$, donde $a_{21}(1 - a_{43} - a_{54}) \geq 0$. Assim, $\det A_0 [\{2, 3, 4, 5\}] > 0$. Atendendo ao caso em que $n = 4$, sabemos que $\det A_0 [\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ e para todo o $\alpha \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$. Restamos, portanto, verificar que $\det A_0 [\alpha] > 0$ para qualquer $\alpha \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $1, 5 \in \alpha$. Para tal, consideremos um subconjunto α de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $1, 5 \in \alpha$. Se os índices de α são não consecutivos, existem $\alpha_1 \subseteq \{1, \dots, 4\}$ e $\alpha_2 \subseteq \{2, \dots, 5\}$ tais que $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ e

$$A_0 [\alpha] = \begin{bmatrix} A_0 [\alpha_1] & 0 \\ 0 & A_0 [\alpha_2] \end{bmatrix},$$

pelo que $\det A_0 [\alpha] = \det A_0 [\alpha_1] \det A_0 [\alpha_2] > 0$. Se os índices de α são consecutivos, então $\alpha = \{1, \dots, 5\}$, donde $A_0 [\alpha] = A_0$ e, por hipótese, $\det A_0 [\alpha] > 0$. Podemos, então, concluir que A_0 é uma M -matriz. \square

O resultado anterior não é válido para $n > 5$, como ilustram os exemplos seguintes.

Exemplo 4.11. Consideremos a matriz parcial 6×6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? & ? & ? & ? \\ -0,3 & 1 & -1 & ? & ? & ? \\ ? & -0,8 & 1 & -1 & ? & ? \\ ? & ? & -0,01 & 1 & -1 & ? \\ ? & ? & ? & -0,6 & 1 & -1 \\ ? & ? & ? & ? & -0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que A é uma M -matriz parcial cujo grafo associado é um caminho e cujo completamento nulo tem determinante positivo. No entanto, A não admite M -completamentos, uma vez que A_0 não é uma M -matriz. Com efeito, $\det A_0[\{1, 2, 3\}] = -0,1 < 0$.

Exemplo 4.12. O exemplo 4.11 permite-nos construir uma M -matriz parcial $n \times n$, com $n > 6$, cujo grafo das entradas especificadas é um caminho, que não admite M -completamentos, mas cujo completamento nulo tem determinante positivo. Consideremos a M -matriz parcial $n \times n$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & \dots & ? & ? \\ -0,3 & 1 & -1 & ? & ? & ? & ? & ? & \dots & ? & ? \\ ? & -0,8 & 1 & -1 & ? & ? & ? & ? & \dots & ? & ? \\ ? & ? & -0,01 & 1 & -1 & ? & ? & ? & \dots & ? & ? \\ ? & ? & ? & -0,6 & 1 & -1 & ? & ? & \dots & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & -0,5 & 1 & -1 & ? & \dots & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 0 & 1 & -1 & \dots & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & 0 & 1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & \dots & 1 & -1 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que $\det B_0 = \det B_0[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}]$. Atendendo a que $B_0[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] = A_0$, sendo A a matriz parcial do exemplo 4.11, podemos concluir que $\det B_0 > 0$. Como $B_0[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}]$ não é uma M -matriz, também B_0 não o será. Portanto, B não admite M -completamentos.

O Lema 4.2 permite-nos resolver o problema de completamento de M -matrizes parciais $n \times n$, com $n \leq 5$, cujo grafo associado é um caminho, com um simples cálculo de um determinante de uma matriz $n \times n$. O resultado que se segue diz respeito a matrizes de ordem superior a 5.

Lema 4.3. Uma matriz $n \times n$, com $n \geq 6$, da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{nn-1} & 1 \end{bmatrix},$$

com $0 \leq a_{i+1i} < 1$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, é uma M -matriz se e somente se $\det A > 0$ e $\det A[\{1, 2, 3\}] > 0$.

Demonstração. Seja A uma matriz da forma referida no enunciado. Se A é uma M -matriz, sabemos, por definição, que todos os menores principais de A são positivos. Em particular, $\det A > 0$ e $\det A[\{1, 2, 3\}] > 0$. A demonstração do recíproco segue por indução em n .

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{43} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{54} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{65} & 1 \end{bmatrix},$$

6×6 , tal que $0 \leq a_{i+1i} < 1$, para $i = 1, \dots, 5$, e tal que $\det A, \det A[\{1, 2, 3\}] > 0$. Pretendemos provar que $\det A[\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, 6\}$.

Facilmente se verificam as seguintes igualdades

$$\det A = \det A[\{1, 2, 3, 4, 5\}] - a_{65} \det A[\{1, 2, 3, 4\}] \quad (4.1)$$

$$= \det A[\{1, 2, 3, 4\}] (1 - a_{65}) - a_{54} \det A[\{1, 2, 3\}] \quad (4.2)$$

$$= \det A[\{1, 2, 3\}] (1 - a_{65} - a_{54}) - a_{43} \det A[\{1, 2\}]. \quad (4.3)$$

Sendo $\det A > 0$, temos, por (4.3), que

$$\det A[\{1, 2, 3\}] (1 - a_{65} - a_{54}) > a_{43} \det A[\{1, 2\}] \geq 0.$$

Atendendo a que $\det A[\{1, 2, 3\}] > 0$, podemos afirmar que $1 - a_{65} - a_{54} > 0$, ou seja, que $\det A[\{4, 5, 6\}] > 0$. Além disso, sabemos, por (4.2), que

$$\det A[\{1, 2, 3, 4\}] (1 - a_{65}) > a_{54} \det A[\{1, 2, 3\}] \geq 0.$$

Dado que $1 - a_{65} > 0$, segue-se que $\det A[\{1, 2, 3, 4\}] > 0$ e, por conseguinte, tendo em conta (4.1),

$$\det A[\{1, 2, 3, 4, 5\}] > a_{65} \det A[\{1, 2, 3, 4\}] \geq 0.$$

Pelo Lema 4.2, sabemos que a matriz $A[\{1, 2, 3, 4, 5\}]$ é uma M -matriz se e somente se $\det A[\{1, 2, 3, 4, 5\}] > 0$.

Podemos, portanto, concluir que $\det A[\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, 5\}$.

Atendamos, agora, às igualdades

$$\det A = \det A[\{2, 3, 4, 5, 6\}] - a_{21} \det A[\{3, 4, 5, 6\}] \quad (4.4)$$

$$= \det A[\{3, 4, 5, 6\}] (1 - a_{21}) - a_{32} \det A[\{4, 5, 6\}]. \quad (4.5)$$

Como já verificámos, $\det A[\{4, 5, 6\}] > 0$. Por hipótese, $1 - a_{21} > 0$ e $\det A > 0$. De (4.5), segue-se que

$$\det A[\{3, 4, 5, 6\}] (1 - a_{21}) > a_{32} \det A[\{4, 5, 6\}] \geq 0$$

e, conseqüentemente, $\det A[\{3, 4, 5, 6\}] > 0$. Podemos, então, afirmar, por (4.4), que

$$\det A[\{2, 3, 4, 5, 6\}] > a_{21} \det A[\{3, 4, 5, 6\}] \geq 0.$$

Sabemos, pelo Lema 4.2, que $A[\{2, 3, 4, 5, 6\}]$ é uma M -matriz se e só se tem determinante positivo.

Assim, $\det A[\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{2, \dots, 6\}$.

Deste modo, para mostrar que A é uma M -matriz, resta-nos provar que $\det A[\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, 6\}$ tal que $1, 6 \in \alpha$. Consideremos um tal α . Se os índices de α são não consecutivos, existem $\alpha_1 \subseteq \{1, \dots, 5\}$ e $\alpha_2 \subseteq \{2, \dots, 6\}$ tais que $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ e

$$A[\alpha] = \begin{bmatrix} A[\alpha_1] & 0 \\ 0 & A[\alpha_2] \end{bmatrix},$$

pelo que $\det A[\alpha] = \det A[\alpha_1] \det A[\alpha_2] > 0$. Se os índices de α são consecutivos, então $\alpha = \{1, \dots, 6\}$, donde $A[\alpha] = A$ e, por hipótese, $\det A[\alpha] > 0$.

Provámos, assim, que A é uma M -matriz.

Seja $n > 6$. Admitamos, como hipótese de indução, que toda a matriz B , $(n-1) \times (n-1)$, da forma

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_{21} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1n-2} & 1 \end{bmatrix},$$

onde $0 \leq b_{i+1i} < 1$, $i = 1, \dots, n-2$, $\det B > 0$ e $\det B[\{1, 2, 3\}] > 0$, é uma M -matriz. Consideremos, agora, uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1n-2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{nn-1} & 1 \end{bmatrix},$$

$n \times n$, com $0 \leq a_{i+1i} < 1$, $i = 1, \dots, n-1$ e tal que $\det A > 0$ e $\det A[\{1, 2, 3\}] > 0$.

São válidas as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \det A &= \det A[\{1, 2, \dots, n-1\}] - a_{nn-1} \det A[\{1, 2, \dots, n-2\}] \\ &= \det A[\{1, 2, \dots, n-2\}] (1 - a_{nn-1}) - a_{n-1n-2} \det A[\{1, 2, \dots, n-3\}] \\ &= \det A[\{1, 2, \dots, n-3\}] (1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2}) \\ &\quad - a_{n-2n-3} \det A[\{1, 2, \dots, n-4\}] \\ &= \det A[\{1, 2, \dots, n-4\}] (1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3}) \\ &\quad - a_{n-3n-4} \det A[\{1, 2, \dots, n-5\}] \\ &\quad \vdots \\ &= \det A[\{1, 2, 3, 4, 5\}] (1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3} - \dots - a_{87} - a_{76}) \\ &\quad - a_{65} \det A[\{1, 2, 3, 4\}] \tag{4.6} \\ &= \det A[\{1, 2, 3, 4\}] (1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3} - \dots - a_{87} - a_{76} \\ &\quad - a_{65}) - a_{54} \det A[\{1, 2, 3\}] \tag{4.7} \\ &= \det A[\{1, 2, 3\}] (1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3} - \dots - a_{87} - a_{76} \\ &\quad - a_{65} - a_{54}) - a_{43} \det A[\{1, 2\}]. \tag{4.8} \end{aligned}$$

Dado que $\det A$, $\det A[\{1, 2, 3\}]$, $\det A[\{1, 2\}] > 0$, podemos afirmar, por (4.8), que

$$1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3} - \dots - a_{87} - a_{76} - a_{65} - a_{54} > 0$$

e, por conseguinte, que

$$1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3} - \dots - a_{87} - a_{76} - a_{65} > a_{54} \geq 0.$$

Assim, por (4.7), temos que $\det A[\{1, 2, 3, 4\}] > 0$. Sabemos, ainda, que

$$1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3} - \dots - a_{87} - a_{76} > a_{65} \geq 0.$$

Atendendo a (4.6), podemos afirmar que $\det A[\{1, 2, 3, 4, 5\}] > 0$.

Seguindo, sucessivamente, este raciocínio, mostramos que

$$\det A[\{1, \dots, 6\}], \dots, \det A[\{1, \dots, n-1\}] > 0$$

e que

$$1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} - a_{n-2n-3} - \dots - a_{87}, \dots, 1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} > 0.$$

Note-se que $A[\{1, \dots, n-1\}]$ é uma matriz $(n-1) \times (n-1)$ com determinante positivo tal que $\det(A[\{1, \dots, n-1\}][\{1, 2, 3\}]) > 0$. Aplicando a hipótese de indução a esta matriz, podemos concluir que $\det A[\alpha] > 0$, para todo o subconjunto α de $\{1, \dots, n-1\}$.

Atendamos, agora, às seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \det A &= \det A[\{2, \dots, n\}] - a_{21} \det A[\{3, \dots, n\}] \\ &= \det A[\{3, \dots, n\}] (1 - a_{21}) - a_{32} \det A[\{4, \dots, n\}] \\ &= \det A[\{4, \dots, n\}] (1 - a_{21} - a_{32}) - a_{43} \det A[\{5, \dots, n\}] \\ &\vdots \\ &= \det A[\{n-3, n-2, n-1, n\}] (1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} - \dots \\ &\quad - a_{n-4n-5}) - a_{n-3n-4} \det A[\{n-2, n-1, n\}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} &= \det A[\{n-2, n-1, n\}] (1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} - \dots - a_{n-4n-5} \\ &\quad - a_{n-3n-4}) - a_{n-2n-3} \det A[\{n-1, n\}]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Vimos já que $1 - a_{nn-1} - a_{n-1n-2} > 0$, isto é, que $\det A[\{n-2, n-1, n\}] > 0$. Como $\det A$, $\det A[\{n-1, n\}] > 0$, temos, por (4.10), que

$$1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} - \dots - a_{n-4n-5} - a_{n-3n-4} > 0$$

e, portanto,

$$1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} - \dots - a_{n-4n-5} > a_{n-3n-4} \geq 0.$$

Por (4.9), podemos, então, afirmar que $\det A[\{n-3, n-2, n-1, n\}] > 0$. Seguindo, sucessivamente, este raciocínio, mostramos que

$$\det A[\{n-4, \dots, n\}], \dots, \det A[\{2, \dots, n\}] > 0$$

e que

$$1 - a_{21} - a_{32} - \dots - a_{n-5n-6}, \dots, 1 - a_{21} - a_{32} - a_{43} > 0.$$

Note-se que $(A[\{2, \dots, n\}][\{1, 2, 3\}]) = A[\{2, 3, 4\}]$.

Como $\{2, 3, 4\} \subseteq \{1, \dots, n-1\}$, sabemos, ainda, que $\det A[\{2, 3, 4\}] > 0$. Podemos, então, aplicar a hipótese de indução à matriz $A[\{2, \dots, n\}]$ e concluir que $A[\{2, \dots, n\}]$ é uma M -matriz. Logo, $\det A[\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{2, \dots, n\}$.

Por forma a concluir a demonstração, resta-nos verificar que $\det A[\alpha] > 0$, para todo o $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ tal que $1, n \in \alpha$. Consideremos um tal α . Se os índices de α são não consecutivos, existem $\alpha_1 \subseteq \{1, \dots, n-1\}$ e $\alpha_2 \subseteq \{2, \dots, n\}$ tais que $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ e

$$A[\alpha] = \begin{bmatrix} A[\alpha_1] & 0 \\ 0 & A[\alpha_2] \end{bmatrix},$$

donde $\det A[\alpha] = \det A[\alpha_1] \det A[\alpha_2] > 0$. Se os índices de α são consecutivos, então $\alpha = \{1, \dots, n\}$, pelo que $A[\alpha] = A$ e, por hipótese, $\det A[\alpha] > 0$.

Podemos, assim, afirmar que A é uma M -matriz. \square

Tendo por base o lema anterior, podemos, agora, resolver o problema de completamento de uma M -matriz parcial $n \times n$, com $n \geq 6$, cujo grafo associado é um caminho, com o cálculo dos determinantes de uma matriz $n \times n$ e de uma matriz 3×3 .

Corolário 4.2. *Uma M -matriz parcial A $n \times n$, com $n \geq 6$, cujo grafo associado é um caminho, admite M -completamentos se e somente se $\det A_0 > 0$ e $\det A_0[\{1, 2, 3\}] > 0$.*

Demonstração. Dada uma M -matriz parcial A $n \times n$ cujo grafo das entradas especificadas é um caminho, podemos admitir, sem perda de generalidade (por multiplicação diagonal positiva e por semelhança diagonal), que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & ? & \dots & ? & ? \\ -a_{21} & 1 & -1 & \dots & ? & ? \\ ? & -a_{32} & 1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & 1 & -1 \\ ? & ? & ? & \dots & -a_{nn-1} & 1 \end{bmatrix},$$

com $0 \leq a_{i+1i} < 1$, para todo o $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Referimos já que uma M -matriz parcial admite M -completamentos se e apenas se o seu completamento nulo é uma M -matriz. Assim, se A admite M -completamentos, é sabido que $\det A_0 > 0$ e $\det A_0[\{1, 2, 3\}] > 0$. Reciprocamente, admitamos que A é tal que $\det A_0 > 0$ e $\det A_0[\{1, 2, 3\}] > 0$ e mostremos que A admite M -completamentos. Atendendo ao lema anterior, sabemos que A_0 é uma M -matriz se e só se $\det A_0 > 0$ e $\det A_0[\{1, 2, 3\}] > 0$, o que conclui a demonstração. \square

4.4 DN -matrizes parciais

Abordaremos, nesta secção, o problema de completamento de DN -matrizes parciais. Recordemos que uma DN -matriz é uma matriz quadrada sobre o corpo dos reais, simétrica, definida negativa e com todas as entradas negativas. Como já vimos anteriormente, uma matriz A é uma DN -matriz se e somente se $-A$ é uma P -matriz positiva simétrica.

Os seguintes simples factos são relevantes para o estudo que nos propomos desenvolver: toda a submatriz principal de uma DN -matriz é, ainda, uma DN -matriz. De referir, ainda, que a classe das DN -matrizes não é invariante para a multiplicação diagonal, à direita ou à esquerda, nem para a semelhança diagonal. No entanto, a classe em questão é invariante para a congruência diagonal positiva ou negativa e para as semelhanças de permutação.

Centraremos, assim, o nosso estudo na seguinte questão: dada uma matriz parcial quadrada A , existe uma DN -matriz A_c que é um completamento de A ?

Começamos por definir as DN -matrizes parciais.

Definição 4.4. Uma matriz parcial quadrada $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ diz-se uma DN -matriz parcial se todas as suas submatrizes principais totalmente especificadas são DN -matrizes, todas as entradas prescritas são negativas e (i, j) é especificada sempre que (j, i) é especificada, sendo, nesse caso, $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 4.13. Facilmente se comprova que a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0,7 & -0,4 \\ -0,7 & -1 & ? \\ -0,4 & ? & -1 \end{bmatrix}$$

é uma DN -matriz parcial.

Um DN -completamento de uma matriz parcial A é um completamento de A que é uma DN -matriz.

Dado que a propriedade de ser DN -matriz é herdada por todas as submatrizes principais, para que uma matriz parcial A admita DN -completamentos, é necessário que A seja uma DN -matriz parcial.

Seja A uma DN -matriz parcial cuja submatriz principal definida pelas entradas diagonais prescritas admite DN -completamentos.

Podemos admitir que A tem, pelo menos, uma entrada diagonal especificada (se A não tem entradas diagonais prescritas, podemos especificar a entrada $(1, 1)$ com um valor real negativo qualquer). Por semelhança de permutação, podemos

assumir, sem perda de generalidade, que as entradas diagonais especificadas de A são, exactamente, $(1, 1), (2, 2), \dots, (r, r)$. Por hipótese, $C = A[\{1, \dots, r\}]$ admite, então, um DN -completamento C_c . Logo, $C_c = C_c^T$, todos os elementos de C_c são negativos e $\det(-C_c)[\{1, \dots, i\}] > 0$, para todo o $i \in \{1, \dots, r\}$.

Consideremos a matriz parcial \bar{A} obtida de A completando C como em C_c . \bar{A} é, ainda, uma DN -matriz parcial, uma vez que a sua única submatriz principal totalmente especificada é $\bar{A}[\{1, \dots, r\}] = C_c$.

Atendamos, agora, à submatriz $\bar{A}[\{1, \dots, r, r+1\}]$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, os elementos nas entradas $(i, r+1), (r+1, i)$ ou são não prescritos ou são iguais e negativos. Como a entrada $(r+1, r+1)$ é não especificada, a matriz parcial $\bar{\bar{A}}$ obtida de \bar{A} completando as entradas $(i, r+1), (r+1, i)$, $i = 1, \dots, r$, não prescritas, com $-c_{ir+1}$, onde $c_{ir+1} > 0$, é uma DN -matriz parcial.

Note-se que $\bar{\bar{A}}[\{1, \dots, r, r+1\}]$ é da forma

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1r} & -a_{1r+1} \\ -a_{12} & -a_{22} & \dots & -a_{2r} & -a_{2r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1r} & -a_{2r} & \dots & -a_{rr} & -a_{rr+1} \\ -a_{1r+1} & -a_{2r+1} & \dots & -a_{rr+1} & ? \end{bmatrix},$$

com cada a_{ij} positivo. Além disso, $\det(-\bar{\bar{A}})[\{1, \dots, i\}] > 0$, para todo o i pertencente a $\{1, \dots, r\}$. Seja B_x a matriz obtida de $\bar{\bar{A}}[\{1, \dots, r, r+1\}]$ completando a entrada $(r+1, r+1)$ com $-x$, onde $x \in \mathbb{R}^+$. Sabemos já que $B_x^T = B_x$, que todos os seus elementos são negativos e que $\det(-B_x)[\{1, \dots, i\}] > 0$, para todo o $i \in \{1, \dots, r\}$. Para que B_x seja uma DN -matriz é, então, suficiente que $\det(-B_x)$ seja positivo. É óbvio que podemos escrever $\det(-B_x)$ na forma

$$\det(-B_x) = x \det(-B_x)[\{1, \dots, r\}] + M,$$

onde $M \in \mathbb{R}$ e não depende de x . Como $\det(-B_x)[\{1, \dots, r\}] > 0$, para x suficientemente grande, $\det(-B_x) > 0$ e B_x é uma DN -matriz. Vimos, deste modo, que a matriz parcial obtida de \bar{A} completando a submatriz principal $\bar{\bar{A}}[\{1, \dots, r, r+1\}]$ com um real adequado é, ainda, uma DN -matriz parcial. Seguindo, sucessivamente, este raciocínio para completar as matrizes $A[\{1, \dots, r+2\}], \dots, A[\{1, \dots, n\}]$, obtemos um DN -completamento de A .

Atendendo à argumentação acima apresentada, podemos concluir que o problema de completamento de DN -matrizes parciais se reduz ao problema de completamento de DN -matrizes parciais em que todas as entradas diagonais são especificadas. Assumimos, então, no que se segue, sem perda de generalidade para o nosso estudo, que as entradas diagonais são todas especificadas.

Como o exemplo que se segue ilustra, nem sempre podemos garantir a existência de um DN -completamento de uma dada DN -matriz parcial.

Exemplo 4.14. Seja A a seguinte DN -matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0,9 & -0,9 & ? \\ -0,9 & -1 & ? & -0,1 \\ -0,9 & ? & -1 & -0,9 \\ ? & -0,1 & -0,9 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -0,9 & -0,9 & -y \\ -0,9 & -1 & -x & -0,1 \\ -0,9 & -x & -1 & -0,9 \\ -y & -0,1 & -0,9 & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Simples cálculos permitem-nos afirmar que

$$\det(-A_c[\{1, 2, 3\}]) = -0,62 + 1,62x - x^2$$

e que

$$\det(-A_c[\{2, 3, 4\}]) = 0,18 + 0,18x - x^2.$$

Logo, estes menores principais são ambos positivos se e só se $0,62 < x < 1$ e $x < 0,09 + 0,5 \times \sqrt{0,7524} \approx 0,523705$, o que é impossível. Podemos, deste modo, concluir que A não admite DN -completamentos.

Neste ponto, uma abordagem combinatorial ao nosso problema permitir-nos-á ir um pouco mais longe no nosso estudo. Discutiremos, assim, a completabilidade de uma DN -matriz parcial em termos do seu grafo associado. Por outras palavras, o nosso objectivo é determinar quais os tipos de grafos que nos permitem garantir a existência de um DN -completamento de DN -matrizes parciais.

4.4.1 Grafos cordais

Começamos por considerar os grafos cordais. O resultado que se segue diz respeito aos grafos 1-cordais.

Proposição 4.2. *Seja A uma DN -matriz $n \times n$, cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal com dois cliques maximais. Então, A admite DN -matrizes como completamentos.*

Demonstração. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} -A_{11} & -a_{12} & X \\ -a_{12}^T & -1 & -a_{23}^T \\ Y & -a_{23} & -A_{33} \end{bmatrix},$$

onde as entradas não especificadas de A são, exactamente, as entradas de X e de Y e onde

$$\begin{bmatrix} -A_{11} & -a_{12} \\ -a_{12}^T & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -1 & -a_{23}^T \\ -a_{23} & -A_{33} \end{bmatrix}$$

são DN -matrizes. Seja k a entrada de sobreposição dos dois cliques.

Vejamos que o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -A_{11} & -a_{12} & -a_{12}a_{23}^T \\ -a_{12}^T & -1 & -a_{23}^T \\ -a_{23}a_{12}^T & -a_{23} & -A_{33} \end{bmatrix}$$

de A é uma DN -matriz.

É óbvio que $(A_c)^T = A_c$ e que todos os elementos de A_c são negativos. Seja $B_c = -A_c$. Para concluir que A_c é uma DN -matriz, resta-nos mostrar que $\det B_c[\{1, \dots, i\}] > 0$, para todo o i pertencente a $\{k+1, \dots, n\}$. Sabemos que $\det B_c[\{1, \dots, i\}] > 0$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ e que $\det B_c[\alpha] > 0$, para qualquer $\alpha \subseteq \{k, \dots, n\}$. Consideremos a submatriz $B_c[\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+s\}]$, com $s \geq 1$ e $s \leq n-k$. Tal submatriz é da forma

$$\begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & a_{12}b_{kk+1} & \dots & a_{12}b_{kk+s} \\ a_{12}^T & 1 & b_{kk+1} & \dots & b_{kk+s} \\ b_{kk+1}a_{12}^T & b_{kk+1} & b_{k+1k+1} & \dots & b_{k+1k+s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{kk+s}a_{12}^T & b_{kk+s} & b_{k+1k+s} & \dots & b_{k+s k+s} \end{bmatrix},$$

onde cada b_{ij} é positivo. Assim, $\det B_c[\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+s\}]$ é dado por

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12}^T & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{kk+1}a_{12}^T & b_{kk+1} & b_{k+1k+1} - b_{kk+1}^2 & \dots & b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{kk+s}a_{12}^T & b_{kk+s} & b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} & \dots & b_{k+s k+s} - b_{kk+s}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{12}^T & 1 \end{bmatrix} \times \det \begin{bmatrix} b_{k+1k+1} - b_{kk+1}^2 & \dots & b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} & \dots & b_{k+sk+s} - b_{kk+s}^2 \end{bmatrix}.$$

Note-se que, sendo

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{12}^T & 1 \end{bmatrix} > 0,$$

o nosso objectivo é, agora, mostrar que

$$\det \begin{bmatrix} b_{k+1k+1} - b_{kk+1}^2 & \dots & b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} & \dots & b_{k+sk+s} - b_{kk+s}^2 \end{bmatrix} > 0.$$

Por hipótese, sabemos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & b_{kk+1} & \dots & b_{kk+s} \\ b_{kk+1} & b_{k+1k+1} & \dots & b_{k+1k+s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{kk+s} & b_{k+1k+s} & \dots & b_{k+sk+s} \end{bmatrix} > 0,$$

pelo que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{kk+1} & b_{k+1k+1} - b_{kk+1}^2 & \dots & b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{kk+s} & b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} & \dots & b_{k+sk+s} - b_{kk+s}^2 \end{bmatrix} > 0.$$

Portanto,

$$\det \begin{bmatrix} b_{k+1k+1} - b_{kk+1}^2 & \dots & b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k+1k+s} - b_{kk+1}b_{kk+s} & \dots & b_{k+sk+s} - b_{kk+s}^2 \end{bmatrix} > 0.$$

Provámos, deste modo, que $\det B_c[\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+s\}] > 0$, para $s \in \{1, \dots, n-k\}$. Logo, $\det B_c[\{1, \dots, i\}] > 0$, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$, pelo que A_c é uma *DN*-matriz. \square

Da última proposição, podemos facilmente concluir o seguinte.

Corolário 4.3. *Toda a DN-matriz parcial 3×3 admite DN-complementos.*

Demonstração. Atendendo a que a classe das DN -matrizes é invariante para a semelhança de permutação e dado que toda a DN -matriz parcial 2×2 admite DN -completamentos, basta-nos considerar uma DN -matriz parcial da forma

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ? \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{23} \\ ? & -a_{23} & -a_{33} \end{bmatrix},$$

onde cada a_{ij} é positivo. Atendendo à Proposição 4.2,

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{12}a_{23}a_{22}^{-1} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{12}a_{23}a_{22}^{-1} & -a_{23} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

é um DN -completamento de A . \square

Para $n > 3$, existe pelo menos uma DN -matriz parcial $n \times n$ que não admite DN -completamentos, como poderemos comprovar mais à frente.

Podemos generalizar a Proposição 4.2 do seguinte modo.

Teorema 4.9. *Seja G um grafo 1-cordal, não dirigido, conexo. Então, toda a DN -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é G , admite DN -completamentos.*

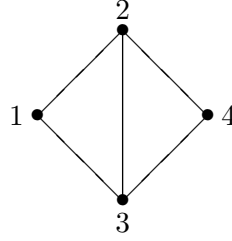
Demonstração. A demonstração segue por indução no número p de cliques maximais de G . O caso em que G tem p cliques maximais é reduzido ao caso em que existem $p - 1$ cliques maximais escolhendo um clique (o p -ésimo clique) como sendo um clique que tem apenas um vértice em comum com outro qualquer clique maximal. Completando o subgrafo induzido pelos restantes $p - 1$ cliques, reduzimos o problema ao caso em que existem dois cliques maximais, tratado na Proposição 4.2. \square

A questão natural que agora se coloca diz respeito à completabilidade de DN -matrizes parciais cujos grafos das entradas especificadas são grafos p -cordais com $p \geq 2$. A resposta a esta questão é dada no exemplo que se segue.

Exemplo 4.15. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0,45 & -0,016 & ? \\ -0,45 & -1 & -0,9 & -0,01 \\ -0,016 & -0,9 & -1 & -0,2 \\ ? & -0,01 & -0,2 & -1 \end{bmatrix}$$

e o grafo G_A das suas entradas especificadas



Observe-se que G_A é um triângulo duplo. Facilmente se verifica que A é uma DN -matriz parcial. Dado $c \in \mathbb{R}^+$, consideremos o completamento

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -0,45 & -0,016 & -c \\ -0,45 & -1 & -0,9 & -0,01 \\ -0,016 & -0,9 & -1 & -0,2 \\ -c & -0,01 & -0,2 & -1 \end{bmatrix}$$

de A . Como $\det(-A_c) = -0,0282247744 - 0,146888c - 0,19c^2 < 0$, $-A_c$ não é definida positiva, pelo que A_c não é uma DN -matriz. Por outras palavras, A não admite DN -completamentos.

Este exemplo pode ser extendido a grafos não dirigidos arbitrários que contêm, como subgrafo induzido, um triângulo duplo: podemos escolher todas as entradas diagonais especificadas iguais a -1 e as restantes entradas prescritas iguais a $-\delta$, com $\delta > 0$, suficientemente pequeno para que $-A$ tenha todos os menores principais correspondentes a submatrizes principais totalmente especificadas positivos.

Como qualquer grafo p -cordal, com $p \geq 2$, contém um triângulo duplo como subgrafo induzido, podemos concluir que se G é um grafo p -cordal, onde $p > 1$, então existe uma DN -matriz parcial cujo grafo associado é G que não admite DN -completamentos.

Como já referimos anteriormente, a classe das DN -matrizes está relacionada com a classe das matrizes definidas positivas. No entanto, note-se que no problema de completamento de matrizes definidas positivas parciais a existência do completamento desejado é sempre garantida quando o grafo associado é cordal (ver [21]). Adicionando a condição de positividade e restringindo o nosso estudo às matrizes sobre \mathbb{R} , os grafos p -cordais deixam de ser completáveis, isto é, nem toda a matriz parcial da classe de interesse cujo grafo associado é p -cordal admite um completamento pertencente a essa classe de interesse.

Vejamos, de seguida, que podemos restringir o estudo do problema de completamento em questão aos grafos conexos.

Teorema 4.10. *Toda a DN-matriz parcial semelhante por permutação a uma DN-matriz parcial diagonal por blocos em que cada bloco da diagonal admite DN-complementamentos pode ser completada de modo a obter-se uma DN-matriz.*

Demonstração. Consideremos uma matriz parcial diagonal por blocos

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & ? & \dots & ? \\ ? & A_2 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & A_k \end{bmatrix},$$

onde cada A_i é uma DN-matriz parcial $n_i \times n_i$ que admite um DN-complementamento \bar{A}_i , $i = 1, \dots, k$. Seja

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & ? & \dots & ? \\ ? & \bar{A}_2 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

a DN-matriz parcial obtida de A completando cada bloco A_i como em \bar{A}_i .

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que as entradas diagonais são todas iguais a -1 .

A demonstração segue por indução no número k de blocos da diagonal.

Consideremos o caso em que $k = 2$. \bar{A} é da forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & ? & ? \\ a_{12}^T & -1 & ? & ? \\ ? & ? & -1 & a_{34}^T \\ ? & ? & a_{34} & A_{44} \end{bmatrix},$$

onde

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{12}^T & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & a_{34}^T \\ a_{34} & A_{44} \end{bmatrix}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x < 1$, consideremos a matriz parcial

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & ? & ? \\ a_{12}^T & -1 & -x & ? \\ ? & -x & -1 & a_{34}^T \\ ? & ? & a_{34} & A_{44} \end{bmatrix}.$$

$\bar{\bar{A}}$ é uma DN -matriz parcial e qualquer seu DN -completamento, caso exista, será, também, um DN -completamento de A . A submatriz

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & ? \\ a_{12}^T & -1 & -x \\ ? & -x & -1 \end{bmatrix}$$

de $\bar{\bar{A}}$ é uma DN -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal, com dois cliques maximais. Pela Proposição 4.2, tal submatriz admite um DN -completamento B_c da forma

$$B_c = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & a_{12}x \\ a_{12}^T & -1 & -x \\ xa_{12}^T & -x & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz parcial

$$\bar{\bar{\bar{A}}} = \begin{bmatrix} A_{11} & a_{12} & a_{12}x & ? \\ a_{12}^T & -1 & -x & ? \\ xa_{12}^T & -x & -1 & a_{34}^T \\ ? & ? & a_{34} & A_{44} \end{bmatrix},$$

obtida de $\bar{\bar{A}}$ completando B como em B_c , é uma DN -matriz parcial, cujo grafo das entradas especificadas é 1-cordal, com dois cliques maximais. Portanto, $\bar{\bar{\bar{A}}}$ e, por conseguinte, $\bar{\bar{A}}$, \bar{A} e A admitem DN -completamentos.

Estudemos, agora, o caso em que $k > 2$ e apliquemos o raciocínio apresentado no caso $k = 2$ aos blocos \bar{A}_1 e \bar{A}_2 . Obtemos um DN -completamento C , de ordem $n_1 + n_2$, da submatriz

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1 & ? \\ ? & \bar{A}_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz parcial

$$A' = \begin{bmatrix} C & ? & \dots & ? \\ ? & \bar{A}_3 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ? & ? & \dots & \bar{A}_k \end{bmatrix}$$

é uma DN -matriz parcial com $k - 1$ blocos diagonais que são DN -matrizes. Pela hipótese de indução, A' admite DN -completamentos. Ora, tais completamentos são, também, completamentos de A . \square

Atendendo ao teorema anterior, podemos, pois, afirmar que o problema de completamento de DN -matrizes se reduz ao caso dos grafos conexos.

4.4.2 Ciclos

Analizamos, nesta secção, o problema de completamento de matrizes em questão para DN -matrizes parciais cujos grafos das entradas especificadas são ciclos. Começamos por notar que, em geral, tais DN -matrizes parciais não admitem DN -completamentos, como o exemplo 4.14 demonstra.

Apresentamos, de seguida, uma condição suficiente para garantir a existência de DN -completamentos de DN -matrizes parciais cujos grafos das entradas prescritas são ciclos. Note-se que, sem perda de generalidade, podemos assumir que tais matrizes parciais são da forma

$$\begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & ? & -a_{1n} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-2n-1} & ? \\ ? & ? & ? & \dots & -a_{n-2n-1} & -1 & -a_{n-1n} \\ -a_{1n} & ? & ? & \dots & ? & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

com $0 < a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1n}, a_{1n} < 1$.

Lema 4.4. *Seja A uma DN -matriz parcial $n \times n$ da forma (4.11) tal que a_{1n} pertence ao intervalo real $]a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} - \varepsilon, a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} + \varepsilon[$, onde*

$$\varepsilon = \max_{j \in \{1, \dots, n-2\}} \left\{ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j+1}}^{n-1} a_{ii+1} \right) (1 - a_{jj+1}^2)^{1/2} (1 - a_{j+1j+2}^2)^{1/2} \right\}.$$

Então, A admite DN -completamentos.

Demonstração. A demonstração segue por indução em n .

Para $n = 4$, consideremos uma matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & -a_{14} \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & -a_{34} \\ -a_{14} & ? & -a_{34} & -1 \end{bmatrix},$$

onde $0 < a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{14} < 1$, e admitamos que

$$a_{14} \in]a_{12}a_{23}a_{34} - \varepsilon, a_{12}a_{23}a_{34} + \varepsilon[,$$

sendo

$$\varepsilon = \max \left\{ a_{34}(1 - a_{12}^2)^{1/2}(1 - a_{23}^2)^{1/2}, a_{12}(1 - a_{23}^2)^{1/2}(1 - a_{34}^2)^{1/2} \right\}.$$

Consideremos as matrizes parciais

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & -a_{14}a_{34}^{-1} & ? \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & ? \\ -a_{14}a_{34}^{-1} & -a_{23} & -1 & -a_{34} \\ ? & ? & -a_{34} & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & ? \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & -a_{14}a_{12}^{-1} \\ ? & -a_{23} & -1 & -a_{34} \\ ? & -a_{14}a_{12}^{-1} & -a_{34} & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $\bar{A}[\{1, 2, 3\}]$ é uma DN -matriz, então, \bar{A} é uma DN -matriz parcial que admite pelo menos um DN -completamento que é, também, um completamento de A . De facto, basta atender à demonstração da Proposição 4.2. Analogamente, se $\bar{\bar{A}}[\{2, 3, 4\}]$ é uma DN -matriz, podemos afirmar que $\bar{\bar{A}}$ é uma DN -matriz parcial que admite pelo menos um DN -completamento que é, também, um completamento de A . Facilmente se verifica que $\det(-\bar{A})[\{1, 2, 3\}] > 0$ se e só se

$$a_{14} \in]a_{12}a_{23}a_{34} - \varepsilon_1, a_{12}a_{23}a_{34} + \varepsilon_1[,$$

onde

$$\varepsilon_1 = a_{34}(1 - a_{12}^2)^{1/2}(1 - a_{23}^2)^{1/2}.$$

Nessas condições, $\bar{A}[\{1, 2, 3\}]$ será, então, uma DN -matriz. Prova-se, ainda, que $\det(-\bar{\bar{A}})[\{2, 3, 4\}] > 0$ se e somente se

$$a_{14} \in]a_{12}a_{23}a_{34} - \varepsilon_2, a_{12}a_{23}a_{34} + \varepsilon_2[,$$

onde

$$\varepsilon_2 = a_{12}(1 - a_{23}^2)^{1/2}(1 - a_{34}^2)^{1/2}.$$

Nessas condições, poderemos concluir que $\bar{\bar{A}}[\{2, 3, 4\}]$ é uma DN -matriz.

Atendendo a que

$$a_{14} \in]a_{12}a_{23}a_{34} - \varepsilon, a_{12}a_{23}a_{34} + \varepsilon[,$$

podemos afirmar que pelo menos uma das matrizes \bar{A} ou $\bar{\bar{A}}$ é uma DN -matriz parcial que admite um DN -completamento que é, também, um completamento de A .

Admitamos, agora, que o resultado é válido para qualquer DN -matriz parcial $(n-1) \times (n-1)$ da forma apresentada.

Consideremos uma DN -matriz parcial A , $n \times n$, da forma (4.11), com

$$a_{1n} \in]a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} - \varepsilon, a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} + \varepsilon[,$$

onde

$$\varepsilon = \max_{j \in \{1, \dots, n-2\}} \left\{ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j+1}}^{n-1} a_{ii+1} \right) (1 - a_{jj+1}^2)^{1/2} (1 - a_{j+1j+2}^2)^{1/2} \right\}.$$

Consideramos dois casos:

$$(a) \varepsilon \neq a_{12}a_{23} \dots a_{n-3n-2} (1 - a_{n-2n-1}^2)^{1/2} (1 - a_{n-1n}^2)^{1/2}$$

Neste caso,

$$\varepsilon = \max_{j \in \{1, \dots, n-3\}} \left\{ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j+1}}^{n-1} a_{ii+1} \right) (1 - a_{jj+1}^2)^{1/2} (1 - a_{j+1j+2}^2)^{1/2} \right\}.$$

Consideremos a matriz parcial

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & -a_{1n}a_{n-1n}^{-1} & ? \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? & ? \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-2n-1} & ? \\ -a_{1n}a_{n-1n}^{-1} & ? & ? & \dots & -a_{n-2n-1} & -1 & -a_{n-1n} \\ ? & ? & ? & \dots & ? & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo à demonstração da Proposição 4.2, sabemos que se $\bar{A}[\{1, \dots, n-1\}]$ é uma DN -matriz parcial que admite DN -completamentos, então, também A admite DN -completamentos. Para que \bar{A} seja uma DN -matriz parcial da forma (4.11), é necessário que $a_{1n}a_{n-1n}^{-1} < 1$. Pela hipótese de indução, para garantir que \bar{A} admite DN -completamentos no caso em que $a_{1n}a_{n-1n}^{-1} < 1$, basta mostrar que

$$a_{1n}a_{n-1n}^{-1} \in]a_{12}a_{23} \dots a_{n-2n-1} - \bar{\varepsilon}, a_{12}a_{23} \dots a_{n-2n-1} + \bar{\varepsilon}[,$$

onde

$$\bar{\varepsilon} = \max_{j \in \{1, \dots, n-3\}} \left\{ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j+1}}^{n-2} a_{ii+1} \right) (1 - a_{jj+1}^2)^{1/2} (1 - a_{j+1j+2}^2)^{1/2} \right\}.$$

Por outras palavras, para concluir o estudo deste caso, pretendemos mostrar que $a_{1n} < a_{n-1n}$ e que

$$a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} - a_{n-1n}\bar{\varepsilon} < a_{1n} < a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{n-1n}\bar{\varepsilon}.$$

Seja $k \in \{1, \dots, n-3\}$ tal que

$$\varepsilon = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, k+1}}^{n-2} a_{ii+1} \right) (1 - a_{kk+1}^2)^{1/2} (1 - a_{k+1k+2}^2)^{1/2}.$$

Como

$$a_{1n} \in]a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} - \varepsilon, a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} + \varepsilon[,$$

podemos afirmar que

$$\begin{aligned} a_{1n} &< a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} + \varepsilon \\ &= a_{12} \dots a_{k-1k}a_{k+2k+3} \dots a_{n-1n} (a_{kk+1}a_{k+1k+2} \\ &\quad + (1 - a_{kk+1}^2)^{1/2}(1 - a_{k+1k+2}^2)^{1/2}) \\ &< a_{n-1n}, \end{aligned}$$

uma vez que

$$a_{12} \dots a_{k-1k}a_{k+2k+3} \dots a_{n-2n-1} < 1$$

e

$$a_{kk+1}a_{k+1k+2} + (1 - a_{kk+1}^2)^{1/2}(1 - a_{k+1k+2}^2)^{1/2} \leq 1.$$

Observemos, agora, que $a_{n-1n}\bar{\varepsilon} = \varepsilon$. Sabemos, então, que

$$a_{1n} \in]a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} - a_{n-1n}\bar{\varepsilon}, a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{n-1n}\bar{\varepsilon}[.$$

Portanto, $\bar{A}[\{1, \dots, n-1\}]$ é uma DN -matriz parcial que admite DN -complementos e \bar{A} admite como complemento pelo menos uma DN -matriz que é, também, um complemento de A .

(b) $\varepsilon = a_{12}a_{23} \dots a_{n-3n-2}(1 - a_{n-2n-1}^2)^{1/2}(1 - a_{n-1n}^2)^{1/2}$

Consideremos, neste caso, a matriz parcial

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -a_{12} & ? & \dots & ? & ? & ? \\ -a_{12} & -1 & -a_{23} & \dots & ? & ? & -a_{1n}a_{12}^{-1} \\ ? & -a_{23} & -1 & \dots & ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a_{n-2n-1} & ? \\ ? & ? & ? & \dots & -a_{n-2n-1} & -1 & -a_{n-1n} \\ ? & -a_{1n}a_{12}^{-1} & ? & \dots & ? & -a_{n-1n} & -1 \end{bmatrix}.$$

Se $\bar{\bar{A}}[\{2, \dots, n\}]$ é uma DN -matriz parcial que admite DN -complementos, podemos concluir, uma vez mais pela demonstração da Proposição 4.2, que A admite DN -complementos. Seguindo um raciocínio análogo ao do caso anterior, é possível mostrar que $a_{1n} < a_{12}$ e que

$$a_{1n} \in]a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} - a_{12}\bar{\bar{\varepsilon}}, a_{12}a_{23} \dots a_{n-1n} + a_{12}\bar{\bar{\varepsilon}}[,$$

onde

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \max_{j \in \{2, \dots, n-2\}} \left\{ \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, j+1}}^{n-1} a_{ii+1} \right) (1 - a_{jj+1}^2)^{1/2} (1 - a_{j+1j+2}^2)^{1/2} \right\}.$$

Assim, $\bar{A}[\{2, \dots, n\}]$ é uma DN -matriz parcial que admite DN -completamentos e, conseqüentemente, também A admite DN -completamentos. \square

Vejamos, de seguida, que a condição suficiente apresentada no resultado anterior não é necessária. Para tal, seja $0 < a < 1$. Consideremos a matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -a & ? & \dots & ? & -a \\ -a & -1 & -a & \dots & ? & ? \\ ? & -a & -1 & \dots & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ? & ? & ? & \dots & -1 & -a \\ -a & ? & ? & \dots & -a & -1 \end{bmatrix},$$

$n \times n$, $n \geq 4$, cujo grafo das entradas especificadas é um ciclo. A condição suficiente enunciada no resultado anterior traduz-se, neste caso, por

$$a \in]a^{n-3}(2a^2 - 1), a^{n-3}[.$$

Como $a \geq a^{n-3}$, a matriz parcial A não satisfaz a condição suficiente enunciada. No entanto,

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & -a & -a & \dots & -a & -a \\ -a & -1 & -a & \dots & -a & -a \\ -a & -a & -1 & \dots & -a & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & -1 & -a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & -1 \end{bmatrix}$$

é um DN -completamento de A . Com efeito, $A_c^T = A_c$, todos os elementos de A_c são negativos e, dado $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\det(-A_c)[\{1, \dots, i\}] = ((i-1)a + 1)(1-a)^{i-1} > 0.$$

Capítulo 5

Completamentos de matrizes principalmente não singulares parciais

Uma matriz principalmente não singular é uma matriz quadrada sobre o corpo \mathbb{R} cujas submatrizes principais são todas invertíveis. Equivalentemente, uma matriz quadrada sobre o corpo dos reais é principalmente não singular se todos os seus menores principais são não nulos. A classe destas matrizes abrange, assim, muitas das classes de matrizes abordadas nos problemas de completamento dos capítulos anteriores.

Neste capítulo, abordamos o problema de completamento de PN -matrizes parciais: procuramos analisar a existência de uma PN -matriz que seja um completamento de uma dada PN -matriz parcial.

Como veremos, ao longo, do estudo apresentado, toda a PN -matriz parcial admite um tal completamento. Para tal, consideramos, separadamente, o caso combinatorialmente simétrico e o caso não combinatorialmente simétrico.

Dirigimos, neste capítulo, o nosso estudo para o problema de completamento de matrizes parcialmente não singulares parciais. Introduzimos, anteriormente, o conceito de PN -matriz no contexto das matrizes completas, bem como algumas das suas propriedades e relações com outras classes de matrizes.

Centrar-nos-emos no problema de completamento associado a estas matrizes: analisaremos a existência de completamentos de uma dada matriz parcial que sejam PN -matrizes. Ao longo deste estudo, assumimos que todas as entradas da diagonal principal são especificadas.

De entre as propriedades referidas, relembremos que toda a submatriz principal de uma PN -matriz é também uma PN -matriz. Este facto permite-nos introduzir, de forma natural, o seguinte conceito.

Definição 5.1. *Uma PN -matriz parcial é uma matriz parcial quadrada cujas submatrizes principais totalmente especificadas são PN -matrizes.*

Exemplo 5.1. A matriz parcial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & ? \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & ? \\ ? & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz principalmente não singular parcial, uma vez que todas as suas submatrizes principais totalmente especificadas são invertíveis. Já a matriz parcial

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & ? \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ -6 & 3 & 1 & ? \\ ? & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

não é uma PN -matriz parcial, dado que $\det B[\{1, 2, 3\}] = 0$.

Dada uma matriz parcial A , chamamos PN -completamento de A a qualquer completamento de A que seja uma PN -matriz.

Tendo em conta que a propriedade de ser PN -matriz é herdada pelas submatrizes principais, para que uma matriz parcial admita PN -completamentos é obviamente necessário que seja uma PN -matriz parcial. Assim, a pergunta base para este nosso estudo é a seguinte: dada uma PN -matriz parcial A , existe algum PN -completamento A_c de A ?

Atendendo a que a classe das PN -matrizes é invariante para as semelhanças de permutação, podemos garantir a existência de um PN -completamento de

uma dada PN -matriz parcial A mostrando que uma certa PN -matriz parcial B , semelhante por permutação a A , admite um PN -completamento.

Apresentamos, nas duas secções que se seguem, a resposta à questão considerada neste capítulo. Começamos por abordar dois casos básicos, em que existe apenas uma entrada não prescrita ou um par de entradas não especificadas posicionalmente simétricas, concluindo o nosso estudo com os casos gerais para matrizes parciais combinatorialmente simétricas e não combinatorialmente simétricas.

5.1 Os casos básicos

Consideramos, nesta secção, o problema de completamento de PN -matrizes parciais para matrizes parciais não combinatorialmente simétricas com uma única entrada não especificada e para matrizes parciais combinatorialmente simétricas com um só par de entradas não especificadas. Tais resultados permitir-nos-ão obter a resposta para os casos mais gerais.

Proposição 5.1. *Seja A uma PN -matriz parcial com uma e uma só entrada não especificada. Então, existe um PN -completamento A_c de A .*

Demonstração. Seja A uma PN -matriz parcial $n \times n$ com uma única entrada não especificada. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que tal entrada é a da posição $(1, n)$. Assim, A será da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & ? \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o completamento A_x de A como sendo a matriz

$$A_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Note-se que

$$\det A_x = (-1)^{n+1} x \det A[\{2, \dots, n\}|\{1, \dots, n-1\}] + \det A_0.$$

Consideramos dois casos:

$$(a) \det A[\{2, \dots, n\}|\{1, \dots, n-1\}] \neq 0$$

Neste caso, é óbvio que existe um e um só valor de x para o qual $\det A_x = 0$.

$$(b) \det A[\{2, \dots, n\}|\{1, \dots, n-1\}] = 0$$

Para cada $i \in \{2, \dots, n\}$, definimos

$$u_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in-1} \end{bmatrix}$$

e

$$v_i = \begin{bmatrix} a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in-1} \end{bmatrix}.$$

Sabemos que o sistema de vectores $\{u_2, \dots, u_{n-1}, u_n\}$ é linearmente dependente. Suponhamos, agora, que $\{u_2, \dots, u_{n-1}\}$ é, também, linearmente dependente. É, então, óbvio que $\{v_2, \dots, v_{n-1}\}$ é um sistema linearmente dependente, pelo que $\det A[\{2, \dots, n-1\}] = 0$, o que contraria o facto de A ser uma PN -matriz parcial. Podemos, pois, concluir que $\{u_2, \dots, u_{n-1}\}$ é um sistema linearmente independente, pelo que existem reais α_j , não todos nulos, com $j \in \{2, \dots, n-1\}$, tais que

$$u_n = \sum_{j \in \{2, \dots, n-1\}} \alpha_j u_j.$$

Assim,

$$\det A_x = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} - \sum_{j \in \{2, \dots, n-1\}} \alpha_j a_{jn} \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que $\det A[\{2, \dots, n\}] \neq 0$, segue-se que

$$a_{nn} - \sum_{j \in I - \{n\}} \alpha_j a_{jn} \neq 0.$$

Portanto, $\det A_x \neq 0$.

Podemos, pois, afirmar que existe, no máximo, um único valor de x para o qual o determinante de A_x é nulo.

Note-se que todas as submatriz principais que são completadas por x são desta forma. Logo, para cada uma, existe, no máximo, um valor de x que a torna singular. Seja S o conjunto de todos esses valores. Para que A_x seja uma PN -matriz, basta escolher $x \in \mathbb{R} - S$. \square

Analizamos, de seguida, o problema em questão para o caso em que temos um par de entradas não especificadas posicionalmente simétricas.

Proposição 5.2. *Seja A uma PN -matriz parcial combinatorialmente simétrica com exactamente duas entradas não prescritas. Então, A admite PN -completamentos.*

Demonstração. Consideremos uma PN -matriz parcial A $n \times n$ com um só par de entradas não especificadas. Podemos assumir, por semelhanças de permutação e sem perda de generalidade, que tais entradas são as das posições $(1, n)$ e $(n, 1)$. A matriz parcial A é da seguinte forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & ? \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ ? & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o completamento A_x de A como sendo a matriz

$$A_x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & x \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ x & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Facilmente se verifica que

$$\begin{aligned} \det A_x &= \det A_0 + (-1)^{n+1} x (\det A_0 [\{1, \dots, n-1\} | \{2, \dots, n\}] \\ &+ \det A_0 [\{2, \dots, n\} | \{1, \dots, n-1\}]) - x^2 \det A [\{2, \dots, n-1\}]. \end{aligned}$$

Logo, ou temos 2 ou 1 ou 0 valores de x para os quais este determinante é nulo.

Todas as submatrizes principais que x completa são da forma de A_x . Assim, existe um número finito de valores de x que têm de ser desconsiderados para que A_x seja uma PN -matriz parcial. Por outras palavras, existe um subconjunto finito S de \mathbb{R} tal que A_x é uma PN -matriz para qualquer x em $\mathbb{R} - S$. \square

5.2 A resposta ao problema

Estamos, agora, em condições de apresentar uma resposta ao problema mais geral em cada um dos casos combinatorialmente simétrico e não combinatorialmente simétrico.

Teorema 5.1. *Toda a PN -matriz parcial combinatorialmente simétrica admite PN -completamentos.*

Demonstração. A demonstração segue por indução no número p de pares de entradas posicionalmente simétricas não especificadas na matriz parcial.

O caso $p = 1$ foi já estudado na Proposição 5.2. Consideramos, então, $p > 1$. Por hipótese de indução, admitamos que toda a PN -matriz parcial combinatorialmente simétrica com $p - 1$ pares de entradas não especificadas posicionalmente simétricas admite PN -completamentos.

Seja A uma PN -matriz parcial combinatorialmente simétrica com p pares de entradas posicionalmente simétricas não prescritas.

Consideremos um par de entradas posicionalmente simétricas não especificadas e todas as submatrizes principais maximais $A[\alpha_1], A[\alpha_2], \dots, A[\alpha_r]$ que este par completa. Cada submatriz $A[\alpha_i]$ é uma PN -matriz parcial combinatorialmente simétrica com um único par de entradas não prescritas. Assim, pela Proposição 5.2, $A[\alpha_i]$ pode ser completada, de modo a obter-se uma PN -matriz, com um par de valores (x_i, x_i) para $x_i \in \mathbb{R} - S_i$, sendo S_i um conjunto finito. Seja $x \in \mathbb{R} - (S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_r)$. Completemos, então, o par de entradas considerado com o par (x, x) . Obtemos uma PN -matriz parcial combinatorialmente simétrica com $p - 1$ pares de entradas posicionalmente simétricas não especificadas. Pela hipótese de indução, tal PN -matriz parcial admite um PN -completamento que é, também, um completamento da matriz parcial inicial A . \square

Concluimos, de seguida, o nosso estudo do problema de completamento de PN -matrizes parciais com o resultado relativo à completabilidade de PN -matrizes parciais não combinatorialmente simétricas.

Teorema 5.2. *Toda a PN -matriz parcial não combinatorialmente simétrica admite PN -completamentos.*

Demonstração. Seja A uma PN -matriz parcial não combinatorialmente simétrica. Se A tem uma e uma só entrada não especificada, a Proposição 5.1 permite-nos garantir a existência do completamento desejado.

Admitamos, então, que A tem mais do que uma entrada não especificada e consideremos o índice mais pequeno $i \in \{1, \dots, n\}$ para o qual existe um índice

$s \in \{1, \dots, n\}$ tal que (i, s) é não especificada e (s, i) é especificada. Seja j o mais pequeno desses índices.

Consideremos a matriz parcial obtida completando a entrada (i, j) com x_{ij} e todas as suas submatrizes principais maximais que x_{ij} completa. Sabemos que cada uma dessas submatrizes tem determinante nulo para um conjunto finito de valores de x_{ij} . Podemos, pois, escolher x_{ij} por forma a que sejam todas PN -matrizes. Obtemos, desta forma, uma nova PN -matriz parcial.

Passamos, caso exista, ao próximo mais pequeno índice $s \in \{1, \dots, n\}$ tal que (i, s) é não especificada e (s, i) é especificada e repetimos o raciocínio. No momento em que percorremos todos esses índices s , passamos ao seguinte índice mais pequeno $i \in \{1, \dots, n\}$ para o qual existe um índice $s \in \{1, \dots, n\}$ tal que (i, s) é não especificada e (s, i) é especificada. Procedemos de modo análogo e assim sucessivamente até obtermos uma PN -matriz parcial combinatorialmente simétrica ou até que haja uma única entrada não especificada. Aplicando o Teorema 5.1 ou a Proposição 5.1, podemos, então, garantir a existência do completamento desejado. \square

Capítulo 6

Conclusões e linhas futuras

Ao longo do estudo que nos levou a este presente trabalho, deparámo-nos com inúmeros resultados, de vários autores, que fazem toda esta Teoria de Completamento e que convergem numa metodologia combinatorial. Encontramos, nesses estudos, motivação para investigar novos problemas de completamento de matrizes sobre o corpo dos reais bem como algumas questões em aberto em problemas já abordados anteriormente. Obtivemos alguns sucessos que agrupamos nesta pequena contribuição para o estudo de problemas de completamento de matrizes.

À medida que desenvolvíamos este nosso estudo, fomos encontrando problemas para os quais não foram ainda apresentadas quaisquer respostas. São problemas em aberto que, estamos certos, serão base de trabalhos posteriores. Neste capítulo, apresentamos uma pequena síntese dessas questões que consideramos mais interessantes.

Ao analisar o problema de completamento de N -matrizes parciais encontramos, como ponto de partida, a necessidade de exigir que a N -matriz parcial fosse diagonalmente semelhante a uma matriz parcial em \mathcal{PS}_n . Como já referimos anteriormente, esta condição não é suficiente no caso não combinatorialmente simétrico. Não chegámos, no entanto, a nenhum resultado conclusivo sobre a suficiência de tal condição no caso combinatorialmente simétrico, o que nos leva à seguinte questão:

Questão 1. *Seja A uma N -matriz parcial combinatorialmente simétrica pertencente a \mathcal{PS}_n , com $n \geq 4$. Existe algum N -completamento A_c de A ?*

Relativamente aos grafos cordais, foi garantida a existência do completamento desejado de toda a N -matriz parcial cujo grafo associado é 1-cordal. Continua, contudo, em aberto o problema seguinte:

Questão 2. *Seja A uma N -matriz parcial $n \times n$ cujo grafo das entradas especificadas é p -cordal, com $p \geq 2$. A admite N -completamentos?*

Respeitante ao caso não combinatorialmente simétrico, parece-nos particularmente interessante a questão que de seguida colocamos.

Questão 3. *Seja A uma N -matriz parcial pertencente a \mathcal{PS}_n cujo digrafo associado é um digrafo CDUM. Existe algum N -completamento de A ?*

Vimos já que a questão análoga para as N_3 -matrizes parciais tem resposta afirmativa e, num estudo preliminar, concluímos que é possível garantir a existência de um N -completamento para $n \leq 8$, o que nos leva a acreditar que também esta questão tem resposta afirmativa.

Na abordagem do problema de completamento das TNP -matrizes parciais, apresentamos condições nos vértices separadores minimais sob as quais é possível garantir a existência de um TNP -completamento de uma dada TNP -matriz parcial cujo grafo associado é 1-cordal monotona-mente etiquetado. Quando essas condições não são satisfeitas, nada podemos dizer sobre a existência do completamento desejado. Nesse contexto, analisamos o caso mais simples dos grafos 1-cordais: o caso dos caminhos não dirigidos, chegando a resultados parciais. Todavia, continua em aberto a questão que se segue.

Questão 4. *Seja A uma TNP -matriz parcial $n \times n$, $n \geq 7$, cujo grafo das entradas especificadas é um caminho, tal que pelo menos uma das entradas das posições (i, i) , com $2 \leq i \leq n - 1$, é nula. Sob que condições existe um TNP -completamento de A ?*

Ainda no enquadramento dos grafos cordais e tendo em conta os resultados descritos anteriormente, surge o seguinte problema:

Questão 5. *Seja A uma TNP -matriz parcial $n \times n$, $n \geq 5$, cujo grafo associado é p -cordal, com $p \geq 2$. Sob que condições existe um TNP -completamento de A ?*

Não admitindo a existência de elementos da diagonal principal nulos, apresentamos condições necessárias e suficientes sob as entradas de uma qualquer TNP -matriz parcial A , cujo grafo associado é um ciclo não dirigido monotona-mente etiquetado, para que exista um TNP -completamento A_c de A . Tal facto leva-nos a colocar as seguintes questões:

Questão 6. *Seja A uma TNP -matriz parcial combinatorialmente simétrica $n \times n$, cujo grafo associado é um ciclo não monotona-mente etiquetado. As condições apresentadas para os ciclos monotona-mente etiquetados são necessárias e/ou suficientes para garantir a existência de um TNP -completamento de A ?*

Questão 7. *É possível utilizar as condições apresentadas para os ciclos monotonicamente etiquetados para outros tipos de grafos não cordais monotonicamente etiquetados nos quais o ciclo tem um papel importante?*

Analisando o problema em questão para as matrizes parciais não combinatorialmente simétricas, vimos já que é possível garantir a existência do completamento desejado quando o digrafo associado é um caminho totalmente especificado. A seguinte questão, mais geral, continua, no entanto, em aberto:

Questão 8. *Seja A uma TNP -matriz parcial não combinatorialmente simétrica cujo digrafo associado é acíclico. Sob que condições existe um TNP -completamento de A ?*

O problema de completamento de M -matrizes parciais está resolvido de forma implícita por Johnson e Smith: uma M -matriz parcial A admite M -completamentos se e só se A_0 é uma M -matriz. Continua, no entanto, em aberto o problema de identificação do tipo de estruturas da matriz parcial que nos permitem garantir a existência do completamento desejado. Neste nosso estudo, apresentamos resultados relativos à completabilidade de M -matrizes parciais cujos grafos associados são caminhos não dirigidos. Em tais resultados, encontramos condições necessárias e suficientes para que uma tal M -matriz parcial admita M -completamentos consideravelmente mais simples do que as condições dadas na resolução de Johnson e Smith. Nesse sentido, surgem diversas questões que resumimos na que se segue:

Questão 9. *Podemos obter resultados análogos aos apresentados para os caminhos não dirigidos para outras estruturas das matrizes parciais no problema de completamento de M -matrizes parciais?*

Bibliografia

- [1] R.B. BAPAT E T.E.S. RAGHAVAN. *Nonnegative matrices and applications*. Cambridge University Press, 1997.
- [2] W.W. BARRETT, C.R. JOHNSON E R. LOEWY. Critical graphs for the positive definite completion problem. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 20:117-130, 1999.
- [3] A. BERMAN E R.J. PLEMMONS. *Nonnegative matrices in the Mathematical Sciences*. SIAM, 1994.
- [4] J.R.S. BLAIR E B. PEYTON. An introduction to chordal graphs and clique trees. Graph Theory and Sparse Matrix Computations. *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, 56:1-30. Springer, 1993.
- [5] R.A. BRUALDI E H.J. RYSER. *Combinatorial matrix theory*. Cambridge University Press, 1991.
- [6] R. CANTÓ E A.M. URBANO. On the Segre characteristic of a block triangular matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 302/303:245-263, 1999.
- [7] D. CARLSON. Inequalities for the degrees of elementary divisors of modules. *Linear Algebra and its Applications*, 5:293-298, 1972.
- [8] A. COMPTA E J. FERRER. Matricial realizations of the solutions of the Carlson problem. *Linear Algebra and its Applications*, 353:197-206, 2002.
- [9] L.M. DEALBA E L. HOGBEN. Completions of P -matrix patterns. *Linear Algebra and its Applications*, 319:83-102, 2000.
- [10] L.M. DEALBA, T.L. HARDY, L. HOGBEN E A. WANGSNES. The (weakly) sign symmetric P -matrix completion problems. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 10:257-271, 2003.
- [11] G.N. DE OLIVEIRA. Matrices with prescribed characteristic polynomial and a prescribed submatrix III. *Monatsh Math.*, 75:441-446, 1971.

- [12] S.M. FALLAT, C.R. JOHNSON E R.L. SMITH. The general totally positive matrix completion problem with few unspecified entries. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 7:1-20, 2000.
- [13] S.M. FALLAT, C.R. JOHNSON, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. P -matrix completions under weak symmetry assumptions. *Linear Algebra and its Applications*, 312:73-91, 2000.
- [14] S.M. FALLAT E P. VAN DEN DRIESSCHE. On matrices with all minors negative. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 7:92-99, 2000.
- [15] S. FRIEDLAND. Inverse eigenvalue problems. *Linear Algebra and its Applications*, 17:15-51, 1977.
- [16] M. GASCA E J.M. PEÑA. A test for strict sign-regularity. *Linear Algebra and its Applications*, 197/198:133-142, 1994.
- [17] I. GOHBERG, M.A. KAASHOEK E F. VAN SCHAGEN. *Partially specified matrices and operators: classification, completion, applications*. Birkhäuser Verlag, 1995.
- [18] E.G. GOODAIRE E M.M. PARMENTER. Discrete mathematics with graph theory, Prentice Hall, 1998.
- [19] W.K. GRASSMANN E J.P. TREMBLAY. *Logic and discrete mathematics. A computer science perspective*. Prentice Hall, 1996.
- [20] R.P. GRIMALDI. *Discrete and combinatorial mathematics. An applied introduction*. Addison-Wesley, PB.CO., 1994.
- [21] R. GRONE, C.R. JOHNSON, E.M. SÁ E H. WOLKOWICZ. Positive definite completions of partial Hermitian matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 58:109-124, 1984.
- [22] J. GROSS E J. YELLEN. *Graph theory and its applications*. CRC Press, 1999.
- [23] L. GURVITS, L. RODMAN E T. SHALOM. Controllability by completions of partial upper triangular matrices. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 6:30-40, 1993.
- [24] F. HARARY. *Graph theory*, Addison-Wesley, PB.CO., 1972.
- [25] L. HOGBEN. Completions of inverse M -matrix patterns. *Linear Algebra and its Applications*, 282:145-160, 1998.

- [26] L. HOGBEN. Completions of M -matrix patterns. *Linear Algebra and its Applications*, 285:143-152, 1998.
- [27] L. HOGBEN. Inverse M -matrix completions of patterns omitting some diagonal positions. *Linear Algebra and its Applications*, 313:173-192, 2000.
- [28] L. HOGBEN. Graph theoretic methods for matrix completion problems. *Linear Algebra and its Applications*, 328:161-202, 2001.
- [29] L. HOGBEN. The symmetric M -matrix and symmetric inverse M -matrix completion problems. *Linear Algebra and its Applications*, 353:159-168, 2002.
- [30] R.A. HORN E C.R. JOHNSON. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [31] R.A. HORN E C.R. JOHNSON. *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [32] K. INADA. The production coefficient matrix and the Stolper-Samuelson condition. *Econometrica*, 39:219-239, 1971.
- [33] C.R. JOHNSON. Inverse M -matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 47:195-216, 1982.
- [34] C.R. JOHNSON. Combinatorial matrix analysis: an overview. *Linear Algebra and its Applications*, 107:3-15, 1988.
- [35] C.R. JOHNSON. Matrix completion problems: a survey. *Proceedings of the Symposia of Applied Mathematics*, 40:171-198, AMS, Providence, 1990.
- [36] C.R. JOHNSON E B.K. KROSCHEL. The combinatorially symmetric P -matrix completion problem. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 1:59-63, 1996.
- [37] C.R. JOHNSON, B.K. KROSCHEL E M. LUNDQUIST. The totally nonnegative completion problem. *Fields Institute Communications*, 18:97-107, 1998.
- [38] C.R. JOHNSON, E.A. SCHREINER E L. ELSNER. Eigenvalue neutrality in block triangular matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 27:289-297, 1990.
- [39] C.R. JOHNSON E R.L. SMITH. The completion problem for M -matrices and inverse M -matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 241-243:655-667, 1996.
- [40] C.R. JOHNSON E R.L. SMITH. The symmetric inverse M -matrix completion problem. *Linear Algebra and its Applications*, 290:193-212, 1999.

- [41] C.R. JOHNSON E R.L. SMITH. The positive definite completion problem relative to a subspace. *Linear Algebra and its Applications*, 307:1-14, 2000.
- [42] C.R. JOHNSON E R.L. SMITH. Linear interpolation problems for matrix classes and a transformational characterization of M -matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 330:43-48, 2001.
- [43] J.J. JOHNSON. On partially non-positive matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 8:185-187, 1974.
- [44] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. On the Jordan form of completions of partial upper triangular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 254:241-250, 1997.
- [45] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. An algorithm for nilpotent completions of partial Jordan matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 275/276:315-325, 1998.
- [46] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. On the Rodman-Shalom conjecture regarding the Jordan form of completions of partial upper triangular matrices. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 3:103-118, 1998.
- [47] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. Controllability completion problems of partial upper triangular matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 47:57-75, 2000.
- [48] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. Graphs and controllability completion problems. *Linear Algebra and its Applications*, 332/334:355-370, 2001.
- [49] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. r -numbers completion problems of partial upper canonical form I. *Applied Mathematics Letters*, 15:685-691, 2002.
- [50] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. r -numbers completion problems of partial upper canonical form II. *Applied Mathematics Letters*, 15:885-891, 2002.
- [51] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA, E A.M. URBANO. Inverse M -matrix completion problem with zeros in the inverse completion. *Applied Mathematics Letters*, 15:677-684, 2002.
- [52] C. JORDÁN, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. Completions of partial P -matrices with acyclic or non-acyclic associated graph. *Linear Algebra and its Applications*, 368:25-51, 2003.

- [53] T. KLEIN. The multiplication of Schur-functions and extensions of p -modules. *Journal London Math. Soc.*, 43:280-284, 1968.
- [54] M. KRUPNICK E L. RODMAN. Completions of partial Jordan and Hessenberg matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 212/213:267-287, 1994.
- [55] P. LANCASTER E M. TISMENETSKY. *The theory of matrices*. Academic Press, Inc., 1985.
- [56] H. LÜTKEPOHL. *Handbook of matrices*. John Wiley and Sons, 1997.
- [57] E. MARQUES DE SÁ. Imbedding conditions for λ -matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 24:33-50, 1979.
- [58] J.S. MAYBEE. Some aspects of the theory of PN -matrices. *SIAM J. Appl. Math.*, 31:397-410, 1976.
- [59] C. MENDES ARAÚJO, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. N -matrix completion problem. *Linear Algebra and its Applications*, 372:111-125, 2003.
- [60] C. MENDES ARAÚJO, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. The N -matrix completion problem under digraphs assumptions. *Linear Algebra and its Applications*, 380:213-225, 2004.
- [61] C. MENDES ARAÚJO, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. The symmetric N -matrix completion problem. Submetido.
- [62] C. MENDES ARAÚJO, J.R. TORREGROSA E A.M. URBANO. The doubly negative matrix completion problem. Submetido.
- [63] L. MIRSKY. Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements. *Journal London Math. Soc.*, 33:14-21, 1958.
- [64] S.R. MOHAN E R. SRIDHAR. On characterizing N -matrices using linear complementarity. *Linear Algebra and its Applications*, 160:231-245, 1992.
- [65] S.R. PARANJAPE. Simple proofs for the infinite divisibility of multivariate gamma distributions. *Sankhya Ser. A*, 40:393-398, 1978.
- [66] T. PARTHASARATHY E G. RAVINDRAN. N -matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 139:89-102, 1990.
- [67] L. RODMAN E M. SCHAPS. On the partial multiplicities of a product of two matrix polynomials. *Integral Equations Operator Theory*, 2:565-599, 1979.
- [68] L. RODMAN E T. SHALOM. Jordan forms of completions of partial upper triangular matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 168:221-249, 1992.

- [69] R. SAIGAL. On the class of complementary cones and Lemke's algorithm. *SIAM J. Appl. Math.*, 23:46-60, 1972.
- [70] F.C. SILVA. Matrices with prescribed characteristic polynomial and submatrices. *Portugaliæ Mathematica*, 44:261-264, 1987.
- [71] F.C. SILVA. Matrices with prescribed eigenvalues and principal submatrices. *Linear Algebra and its Applications*, 92:241-250, 1987.
- [72] R.C. THOMPSON. Interlacing inequalities for invariant factors. *Linear Algebra and its Applications*, 24:1-31, 1979.
- [73] I. ZABALLA. Matrices with prescribed rows and invariant factors. *Linear Algebra and its Applications*, 87:113-146, 1987.

Lista de Notações

\mathbb{C} – conjunto dos números complexos.

\mathbb{R} – conjunto dos números reais.

\mathbb{R}^+ – conjunto dos números reais positivos.

\mathbb{R}_0^- – conjunto dos números reais não positivos.

\mathbb{R}_0^+ – conjunto dos números reais não negativos.

\mathbb{R}^n – conjunto das matrizes sobre \mathbb{R} do tipo $n \times 1$.

\mathbb{C}^n – conjunto das matrizes sobre \mathbb{C} do tipo $n \times 1$.

Z_n – conjunto das matrizes quadradas de ordem n , sobre \mathbb{R} , com entradas não diagonais não positivas.

\max – máximo.

\min – mínimo.

I_n – matriz identidade de ordem n .

0 – escalar, matriz ou vector nulo.

A^{-1} – matriz inversa da matriz A .

A^T – transposta da matriz A .

A^* – transposta conjugada da matriz complexa A .

$\det A$ – determinante da matriz A .

$r(A)$ – característica da matriz A .

$A \geq 0$ – todas as entradas da matriz A são não negativas.

$A \leq 0$ – todas as entradas da matriz A são não positivas.

$A[\alpha|\beta]$ – submatriz de A obtida suprimindo de A as linhas cujos índices não estão em α e as colunas cujos índices não estão em β .

$A[\alpha]$ – o mesmo que $A[\alpha|\alpha]$.

$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ – matriz diagonal de ordem n cuja entrada (i, i) é a componente i de (d_1, \dots, d_n) .

e_i – vector unitário de ordem n cuja coordenada não nula (igual a 1) é a i -ésima.

$A \circ B$ – produto de Hadamard das matrizes A e B $m \times n$.

λ – valor próprio de uma matriz quadrada (usualmente)

$\{\lambda_i\}$ – conjunto dos valores próprios (espectro) de uma matriz quadrada A ; se A é hermitica, consideramos, usualmente, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.
 $\rho(A)$ – raio espectral de A .
 X' – o complementar do conjunto X no universo considerado.
 $|X|$ – número de elementos do conjunto X .
 $\#X$ – o mesmo que $|X|$.
 $X - Y$ – conjunto dos elementos de X que não pertencem a Y .
 $\text{sign}(x)$ – sinal do real não nulo x (igual a 1 se x é positivo e a -1 se x é negativo).
 $\text{sgn}(\sigma)$ – sinal da permutação σ .
c.p.o. – conjunto parcialmente ordenado.
 \mathcal{S}_n – conjunto das matrizes $n \times n$ $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ sem entradas nulas e tais que $\text{sign}(a_{ij}) = (-1)^{i+j+1}$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
 \mathcal{PS}_n – conjunto das matrizes parciais $n \times n$ $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ sem entradas especificadas nulas e tais que $\text{sign}(a_{ij}) = (-1)^{i+j+1}$ sempre que (i, j) é especificada, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
 G_A – grafo das entradas especificadas da matriz parcial A (grafo associado de A).
 D_A – digrafo das entradas especificadas da matriz parcial A (digrafo associado de A).
 Γ_A – padrão da matriz parcial A .
 $G \cong H$ – o grafo (digrafo) G é isomorfo ao grafo (digrafo) H .
 $\langle S \rangle$ – subgrafo induzido.
 $d_{in}(j)$ – grau de entrada do vértice j .
 $d_{out}(j)$ – grau de saída do vértice j .
 $d_d(j)$ – grau de descida do vértice j .
 $d_u(j)$ – grau de subida do vértice j .
 K_p – clique com p vértices.
 A_0 – complemento nulo de A (matriz obtida de uma matriz parcial A completando todas as entradas não especificadas com 0).
 DN -matriz – matriz duplamente negativa.
 PN -matriz – matriz principalmente não singular.
 TNP -matriz – matriz totalmente não positiva.

Índice

- arco, 21
- aresta, 20
- arestas adjacentes
 - condições, 149
- bloco-ciclo, 26
- caminho, 22
 - comprimento, 22
 - monotonamente etiquetado, 139
 - totalmente especificado, 27, 159
- ciclo, 22
 - corda, 23
 - monotonamente etiquetado, 155, 164
- clique, 24
 - maximal, 24
- completamento, 13
 - nulo, 14
- corda, 23
- digrafo, 21
 - acíclico, 27
 - associado, 21
 - CDUM, 28
 - componente conexa, 23
 - conexo, 23
 - fortemente conexo, 23
 - isomorfismo, 22
 - ordem, 21
- DN-completamento, 193
- DN-matriz, 55, 192
 - condições equivalentes, 55
 - parcial, 193
- duplo ciclo, 25
- duplo triângulo, 25
- grafo, 20
 - associado, 21
 - clique, 24
 - $\text{clique}^{+(n-k)}$, 153
 - clique^{+1} , 152
 - completo, 21
 - componente conexa, 23
 - conexo, 23
 - cordal, 23
 - dirigido, 21
 - isomorfismo, 22
 - monotonamente etiquetado, 24, 117
 - ordem, 20
 - p-cordal, 24
 - subjacente, 22
- grafo-bloco, 26
- identidade de Jacobi, 11
- M-completamento, 182
- M-matriz, 53, 182
 - condições equivalentes, 53
 - parcial, 182
- matriz
 - duplamente negativa, 55
 - fracamente sinal-simétrica, 14
 - permutação, 10
 - principalmente não singular, 56

- semelhança admissível, 20
- sinal-simétrica, 14
- totalmente não positiva, 47
- totalmente negativa, 47
- matriz parcial, 13
 - combinatorialmente simétrica, 14
 - completamento, 13
 - completamento nulo, 14
 - diagonal por blocos, 23
 - fracamente sinal-simétrica, 15
 - irredutível, 14
 - ordem, 13
 - padrão, 13
 - quadrada, 13
 - redutível, 14
 - semelhança, 20
 - sinal-simétrica, 14
 - triangular superior, 14
- menores principais descendentes, 12
- N_k -completamento, 99
- N_k -matriz, 37, 98
 - parcial, 99
- N -completamento, 60
 - simétrico, 90
- N -matriz, 37, 60
 - parcial, 60
 - simétrica, 42
 - condição equivalente, 47
 - parcial, 89
- n -vector, 10
- ordenação topológica, 33
 - algoritmo, 33
- P_k -completamento, 179
- P_k -matriz, 52, 178
 - parcial, 179
- P -completamento, 172
- P -matriz, 51, 172
 - condições equivalentes, 51
 - parcial, 172
- PN -completamento, 208
- PN -matriz, 56, 208
 - condição equivalente, 56
 - parcial, 208
- produto de Hadamard, 10
- semiciclo, 23
- subgrafo, 20
 - dirigido, 21
 - induzido, 21
 - induzido, 20
- TN -matriz, 47
- TNP_2 -completamento, 168
- TNP_2 -matriz, 168
 - parcial, 168
- TNP -completamento, 112
- TNP -matriz, 47, 112
 - parcial, 112
- vértice, 20, 21
 - grau de descida, 28
 - consecutivo, 28
 - grau de entrada, 28
 - grau de saída, 28
 - grau de subida, 28
 - separador minimal, 24
- vectores
 - duplamente sinal-relacionados, 11
 - sinal-relacionados, 10
 - unitários, 10

